Condensé Mathématiques PSI

Table des matières

2018 — S. Jansou et G. Fayard

Première partie

Algèbre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Chapitre 1 : Rappels et compléments d'algèbre

I. Espaces vectoriels et sev

1. Espace vectoriel $(E, +, \cdot)$
2. Sous-espace vectoriel : stable par combinaison linéaire et contient le vecteur nul.
3. L'intersection de plusieurs sev est un sev.
4. $\text{Vect}(x_1, ..., x_n) = \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n\}_{\lambda_i \in \mathbb{K}}$
5. $F + G = \{y + z\}_{(y,z) \in F \times G}$ est un sev.
6. **Somme directe de deux sous-espaces vectoriels** Les trois assertions sont équivalentes :
   (a) F et G sont en somme directe (noté $F \oplus G$)
   (b) $\forall x \in F + G,\ \exists!\ (y, z) \in F \times G,\ x = y + z$
   (c) $F \cap G = \{0_E\}$ (dem)
7. **Supplémentaires** F et G supplémentaires dans E : $\quad E = F \oplus G \Longleftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$
8. La somme de plus de deux sev : $F_1 + ... + F_m = \{x_1 + ... + x_m\}_{(x_1,...,x_m) \in F_1 \times ... \times F_m}$ est un sev (dem)
9. **Somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels** Les trois assertions sont équivalentes :
   (a) $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe (somme notée alors $\bigoplus\limits_{j=1}^{m} F_j$)
   (b) $\forall x \in F_1 + ... + F_m,\ \exists!\ (y_1, ..., y_m) \in F_1 \times ... \times F_m,\ x = y_1 + ... + y_m$
   (c) $\forall y_1 \in F_1, ..., \forall y_m \in F_m,\ [y_1 + ... + y_m = 0_E \Rightarrow y_1 = ... = y_m = 0_E]$ (dem)

II. Applications linéaires

1. L'application u est linéaire ($u \in \mathcal{L}(E, F)$) si $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$
2. Endomorphisme : $u \in \mathcal{L}(E)$
3. Forme linéaire : $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le dual de E.
4. La composée de deux applications linéaires est linéaire.

5. Si u et v commutent :
$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$$
$$u^n - v^n = (u-v)\sum_{k=0}^{n-1} u^k v^{n-k-1}$$
6. **Propriétés** Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$
   (a) $u(\mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)) = \mathrm{Vect}(u(x_1),...,u(x_n))$
   (b) **Noyau** $\ker(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_E\}$.
   (c) **Image** $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ u(x) = y\}$.
   (d) $\ker(u)$ sev de E et $\mathrm{Im}(u)$ sev de F.
   (e) **Injectivité** u est dite injective si $\ker(u) = \{0_E\}$.
   (f) **Surjectivité** u est dite surjective si $\mathrm{Im}(u) = F$.
7. **Projecteurs** $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur $\iff p^2 = p$
   (a) $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$
   (b) p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
   (c) $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$: l'image d'un projecteur est l'ensemble de ses points fixes.
8. **Famille de projecteurs associés à une somme directe** Soit $E = F_1 \oplus ... \oplus F_m$. On associe à cette décomposition les endomorphismes $p_1,...,p_m$ tels que :
$$\begin{cases} E = F_1 \oplus ... \oplus F_m \\ x = p_1(x) + ... + p_m(x) \\ \forall j \in [\![1;m]\!],\ p_j(x) \in F_j \end{cases}$$
   Ce sont des projecteurs de E (dem). On a : $p_1 + ... + p_m = \mathrm{id}_E$
9. $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $E = E_1 \oplus ... \oplus E_m$. u peut être décomposée de façon unique telle que : $u(x) = u_1(p(x)) + ... + u_m(p_m(x))$ (dem).
10. **Symétries** $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie $\iff s^2 = \mathrm{id}_E$.
    (a) $E = \ker(s - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_E)$
    (b) s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$.
11. **Isomorphismes** On dit que $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme si φ est une bijection. E et F sont alors dits isomorphes.
    (a) La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
    (b) La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
    (c) Un isomorphisme de E dans E est un automorphisme.
    (d) Soient φ et ψ deux isomorphismes. Alors : $(\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

III. Familles libres et génératrices, bases

1. **Familles libres** On dit que la famille $\mathcal{L} = (x_1,...,x_p)$ de E est libre si
$$\forall \lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{K},\ \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p = 0_E \Rightarrow (\lambda_1,...,\lambda_p) = (0,...,0).$$
   (a) Une famille non libre est dite liée.
   (b) Une famille est liée ssi un de ses vecteurs est combinaison linéaire de ses autres vecteurs.
   (c) Soit $x_{p+1} \in E$. $(x_1,...,x_{p+1})$ est libre $\iff x_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.
2. **Familles génératrices** On dit que la famille $\mathcal{G} = (x_1,...,x_p)$ de E est génératrice si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.
   (a) Soit $\mathcal{F} = (y_1,...,y_p)$ une famille quelconque de E. $\mathcal{F}$ est génératrice de $E \iff \forall j \in [\![1;m]\!],\ y_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$.
3. **Bases** La famille $\mathcal{B} = (x_1,...,x_p)$ de E est une base si $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E.
   (a) $\mathcal{B}$ est une base $\iff \forall x \in E,\ \exists!(\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$.

4. Soit $\mathcal{F}$ une famille de E et φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, ..., \lambda_p) & \longmapsto & \lambda_1 x_1 + ... \lambda_p x_p \end{array}$$

   (a) $\mathcal{F}$ est libre $\Longleftrightarrow \varphi$ est injective.
   (b) $\mathcal{F}$ est génératrice de $E \Longleftrightarrow \varphi$ est surjective.
   (c) $\mathcal{F}$ est une base de $E \Longleftrightarrow \varphi$ est un isomorphisme.
5. **Théorème de la base incomplète**
   (a) Soit $\mathcal{L} = (x_1, ..., x_p)$ une famille libre de E. Alors on peut la compléter pour en faire une base $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_p, ..., x_n)$ de E.
   (b) Soit $\mathcal{G} = (x_1, ..., x_m)$ une famille génératrice de E. Alors on peut en extraire une base $\mathcal{B} = (x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ de E.
6. **Image d'une famille par une application linéaire** Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F}$ une famille de E.
   (a) Si $\mathcal{F}$ est libre et u est injective, alors $u(\mathcal{F})$ est libre.
   (b) Si $\mathcal{F}$ est génératrice et u est surjective de E, alors $u(\mathcal{F})$ est génératrice de F.
   (c) Si $\mathcal{F}$ est une base de E et u est bijective, alors $u(\mathcal{F})$ est une base de F.
7. **Application linéaire définie par l'image d'une base** Soient E et F deux espaces vectoriels (E de dimension finie), $\mathcal{B}$ une base de E et $(y_1, ..., y_p)$ une famille d'éléments de F. Alors : $\exists! u \in \mathcal{L}(E, F),\ \forall j \in [\![1; p]\!],\ u(e_j) = y_j$.

IV. Dimension

1. **Dimension finie** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. E admet une famille génératrice (finie) si E admet une base (finie). On dit alors que E est de dimension finie.
2. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de p vecteurs de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de m vecteurs de E. Alors $p \leqslant m$.
3. **Dimension** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E et noté $\dim E$.
   (a) Si $\dim E = 0$ alors $E = \{0_E\}$.
   (b) Si $\dim E = 1$ alors E est une droite vectorielle. $E = \mathrm{Vect}(x)$, où x est un vecteur non nul.
   (c) Si $\dim E = 2$ alors E est un plan vectoriel. $E = \mathrm{Vect}(x, y)$, où x et y sont deux vecteurs non nuls.
   (d) Si E est de dimension finie, on pose : $\dim E < +\infty$. Si E est de dimension non finie, on pose $\dim E = +\infty$.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, $\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.
4. **Familles libres et génératrices en dimension finie** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
   (a) Une famille libre de E possède au plus n vecteurs.
   (b) Une famille génératrice de E possède au moins n vecteurs.
   (c) $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_p)$ est une base de $E \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille libre et $n = p \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et $n = p$.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un sev de E. Alors $\dim F \leqslant \dim E$.
6. **Rang d'une famille de vecteurs** Soit $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_p)$ une famille de E.
   (a) $\mathrm{rg}\mathcal{F} = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$
   (b) $\mathrm{rg}\mathcal{F} \leqslant p$ avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est libre.
   (c) $\mathrm{rg}\mathcal{F} \leqslant \dim E$ avec égalité ssi $\mathcal{F}$ est génératrice.

V. Sommes directes en dimension finie

1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $F_1, ... F_m$ des sev de dimensions finies de E et $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m$ des bases respectivement de $F_1, ..., F_m$. On pose $\mathcal{F}$ la famille obtenue en juxtaposant ces bases.
   (a) $E = F_1 \oplus ... \oplus F_m \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est une base de E (dem).
   (b) Si $\mathcal{F}$ est une base de E, elle est dite adaptée à la décomposition de E en somme directe.

2. $\dim(F_1 + ... + F_m) \leqslant \dim F_1 + ... + \dim F_m$ avec égalité ssi $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe.
3. **Conditions pratiques** $E = F_1 \oplus ... \oplus F_m$ si deux des trois conditions sont satisfaites (dem) :
   (a) $F_1, ..., F_m$ sont en somme directe.
   (b) $E = F_1 + ... + F_m$.
   (c) $\dim E = \dim F_1 + ... + \dim F_m$.
4. **Supplémentaire en dimension finie** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors tout sev de E admet un supplémentaire dans E.
5. Dans un espace vectoriel de dimension 3, l'intersection de deux plans vectoriels est une droite vectorielle.

VI. Rang d'une application linéaire

1. **Rang d'une application linéaire** Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Im}(u)$.
   (b) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille génératrice de E. On a : $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), ..., u(e_p))$
2. **Théorème** Soit S un sev tel que : $E = \ker(u) \oplus S$. Alors S est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.
3. **Corollaire : Théorème du rang** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E < +\infty$. On a :
$$\dim E = \mathrm{rg}(u) + \dim \ker(u)$$
4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a (dem) :
$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective}$$
5. **Formule de Grassmann** Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G deux sev de E. On a (dem) :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

VII. Matrices

1. **Produit matriciel** Soient $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Les coefficients de la matrices $C = AB \in \mathrm{M}_{mp}(\mathbb{K})$ sont donnés par :
$$\forall (i,k) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;p]\!],\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$
2. $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par le produit.
3. Si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors on peut appliquer les formules du binôme et de factorisation (cf. II.5.).
4. **Matrice inverse** $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si : $\exists B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
   (a) B est notée A^{-1}.
   (b) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, ensemble des matrices inversibles (appelé Groupe linéaire) de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ stable par le produit.
   (c) $\forall P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ (PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1}$.
5. **Transposition** ${}^tA = A^T$
   (a) La transposition est linéaire.
   (b) ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$
   (c) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
6. **Matrices symétriques et antisymétriques** Soit $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
   (a) $A \in S_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA = A$.
   (b) $A \in A_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA = -A$.
   (c) $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.
   (d) $\dim S_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

7. **Matrices diagonales, matrices triangulaires** Les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures sont des $\mathbb{K}$-ev.
   (a) L'ensemble des matrices diagonales est stable par le produit et est de dimension n.
   (b) Les ensembles des matrices triangulaires supérieures et inférieures sont stables par le produit et de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
8. **Matrice d'une famille de vecteurs : $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x_1, ..., x_n})$** Ce sont les vecteurs (en colonnes) écrits dans la base $\mathcal{B}$.
9. **Matrice d'une application linéaire** Soient E de dimension p, F de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
   (a) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}[u(e_1), ..., u(e_p)]$, où $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ est une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
   (b) $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.
   (c) $\mathcal{L}(E)$ et $M_p(\mathbb{K})$ sont isomorphes.
10. **Matrice de passage et changement de base**
   (a) $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$
   (b) Cette matrice est inversible et : $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$
   (c) Formule de changement de base pour un vecteur x :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$
   (d) Formule de changement de base pour un endomorphisme :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$
   (e) Formule de changement de base pour une application de linéaire de E dans F :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u)\mathcal{P}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$
11. **Rang d'une matrice** Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs-colonne.
   (a) $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ est la famille des vecteurs-colonne de A.
   (b) $\mathrm{rg}(A) = p \iff u$ est injective $\iff \mathcal{F}$ est libre.
   (c) $\mathrm{rg}(A) = n \iff u$ est surjective $\iff \mathcal{F}$ est génératrice de F.
   (d) $\mathrm{rg}(A) = r$, $r \leqslant \min(n,p)$. Alors $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ A = PJ_rQ$.
   (e) $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$ et les opérations sur les lignes et colonnes, ainsi que l'ajout d'un vecteur combinaison linéaire des autres ne changent pas le rang.
   (f) $\mathrm{rg}(A) = n \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   (g) $\mathrm{rg}(A) = 0 \iff A = 0_n$.
12. **Matrices semblables** $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tq : $B = PAP^{-1}$.
   (a) La relation « être semblables » est une relation d'équivalence sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (réflexivité, transitivité, symétrie) (dem).
   (b) Deux matrices semblables ont le même rang.
   (c) Si parmi deux matrices semblables, l'une est inversible, alors l'autre l'est aussi.
   (d) Deux matrices sont semblables ssi elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.
13. **Matrices par blocs**
   (a) On peut faire des opérations (addition, multiplication) de matrices par blocs en prenant directement les matrices au lieu de chaque coefficient :
   $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$
   (b) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$ (généralisation pour 6 blocs, 9 blocs, etc.)
   (c) Soient $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ avec A, A' semblables et B, B' semblables. Alors M et M' sont semblables.

VIII. Trace

1. **Trace** La trace d'une matrice est la somme des ses coefficients diagonaux. C'est une forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$
   (b) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (valable avec deux matrices uniquement)
   (c) Deux matrices semblables ont la même trace.
2. **Trace d'un endomorphisme** $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$
3. **Trace d'un projecteur** La trace d'un projecteur est égale à son rang.

IX. Sous-espaces stables

1. **Sous-espace stable** Soient E un $\mathbb{K}$-ev, F un sev de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) u stabilise F / F est stable par u / F est u-stable si $u(F) \subset F$.
   (b) $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.
   (c) On définit alors l'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(F)$ induit par u. $v : x \mapsto u(x)$.
   (d) Sev stables évidents : E, 0_E, $\ker(u)$, $\mathrm{Im}(u)$.
2. Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $uv = vu$. Alors $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont v-stables (dem).
3. **Dimension finie** E $\mathbb{K}$-ev de dimension n, F sev de E de dimension r, $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base de F qu'on complète avec $(n-r)$ vecteurs pour en faire une base de E. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A \in M_r(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathrm{M}_{n-r,r}(\mathbb{K}) \\ D \in \mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

   (a) F est u-stable ssi $C = 0_{n-r,r}$ (dem).
   (b) Si F est u-stable, $A = \mathrm{Mat}_{(e_1,...,e_r)}(v)$ où $v \in \mathcal{L}(F)$ est l'endomorphisme induit par u.
4. **Somme directe** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $F_1, ..., F_r$ de dimensions $n_1, ..., n_r$. tq : $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$. On considère $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\big[\forall i \in [\![1, r]\!] : u(F_i) \subset F_i\big] \iff \exists A_1 \in \mathrm{M}_{n_1}(\mathbb{K}), ..., \exists A_r \in \mathrm{M}_{n_r}(\mathbb{K}),\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$$

X. Hyperplans

1. **Hyperplan** Soit E de dimension n. Un hyperplan de E est un sev de E de dimension $n-1$.
2. **Théorème** Les hyperplans de E sont les noyaux de ses formes linéaires non nulles.
3. Les hyperplans de E sont les sev de E qui admettent une droite vectorielle comme supplémentaire.
4. **Équation d'un hyperplan dans une base de E** Soient E de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.
   (a) Les hyperplans de E sont les parties H qui admettent dans $\mathcal{B}$ une équation de la forme : $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ où $a_1, \cdots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls.
   (b) C'est à dire : $x = (x_1, ..., x_n)_{\mathcal{B}} \in H \iff a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$.
   (c) L'équation cartésienne d'un hyperplan de E est unique (à un facteur multiplicatif non nul près).

XI. Déterminants

1. **Rappels et propriétés** Soit E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
   (a) $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$.
   (b) $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det u \neq 0$.
   (c) $\forall \mathcal{F} \in E^n,\ \mathcal{F}$ est une base de $E \iff \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$.
   (d) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
   (e) $\det A = \det {}^t A$.
   (f) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \det \lambda A = \lambda^n \det A$.
   (g) Une permutation de deux colonnes ou de deux lignes change le signe du déterminant.
   (h) Bilinéarité : $\begin{vmatrix} \lambda L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \lambda C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
3. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produits des déterminants de ses blocs diagonaux.
4. **Déterminant de Van der Monde** Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. On a (dem) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

XII. Polynômes

1. **Polynômes irréductibles**
   (a) $P \in \mathbb{R}[X]$. P est irréductible ssi P est de degré 1 ou P est de degré 2 avec deux racines non réelles.
   (b) $P \in \mathbb{C}[X]$. P est irréductible ssi P est de degré 1.
   (c) Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ est le produit de polynômes irréductibles.
   (d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $P(X) = \mu(X - \lambda_1)^{\alpha_1}...(X - \lambda_r)^{\alpha_r}$.
   — Les λ_i, 2 à 2 distincts, sont les racines de P de multiplicité α_i.
   — μ est le coefficient dominant.
   — P admet r racines comptées sans multiplicité et $\alpha_1 + ... + \alpha_r$ racines comptées avec multiplicité.
   (e) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $P(X) = \mu(X - \lambda_1)^{\alpha_1}...(X - \lambda_r)^{\alpha_r} \times (X^2 + b_1 X + x_1)^{\beta_1}...(X^2 + b_s X + c_s)^{\beta_s}$.
   — Les facteurs de degré deux sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ (ils n'admettent pas de racines réelles) et les (b_i, c_i) sont 2 à 2 distincts.
   — Les λ_i, 2 à 2 distincts, sont les racines réelles de P de multiplicité α_i.
   — μ est le coefficient dominant.
   — P admet r racines comptées sans multiplicité et $\alpha_1 + ... + \alpha_r$ racines réelles comptées avec multiplicité.
2. **Polynômes scindés** Un polynôme est scindé s'il peut s'écrire sous forme de produit de polynômes de degré 1.
   (a) Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.
   (b) Un polynôme est scindé sur $\mathbb{R} \iff$ il n'admet que des racines réelles.
   (c) Un polynôme est scindé à racines simples s'il est scindé et toutes ses racines sont de multiplicité 1.
3. Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. Alors :
   (a) nb de racines de P comptées sans multiplicité $\underset{(1)}{\leqslant}$ nb de racines de P comptées avec multiplicité $\underset{(2)}{\leqslant} \deg P$
   (b) (1) est une égalité $\iff$ P est à racines simples

   (c) (2) est une égalité $\iff$ P est est scindé
   (d) (1) et (2) sont des égalités $\iff$ P est scindé à racines simples.
4. **Caractérisation des multiplicités des racines de P**
   (a) λ est racine de multiplicité α ssi $(X-\lambda)^{\alpha}$ divise P et $(X-\lambda)^{\alpha+1}$ ne divise pas P.
   (b) λ est racine de multiplicité α ssi $P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0$ et $P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0$.
   (c) P admet une racine multiple si P et P' admettent une racine commune.
5. **Relations coefficients-racines** $P(X) = a_n X^n + ... + a_0 X^0 \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On le suppose scindé : $P(X) = \mu(X-\lambda_1)...(X-\lambda_n)$
   (a) $a_n = \mu$
   (b) $\lambda_1 + ... + \lambda_n = \dfrac{-a_{n-1}}{a_n}$
   (c) $\lambda_1 \times ... \times \lambda_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

Chapitre 2 : Réduction (diagonalisation et trigonalisation) des endomorphismes

I. Valeurs propres (vap) et Vecteurs propres (vep)

1) Dimension quelconque

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. **Définition** Soient, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
   (a) On dit que λ est vap si $\exists x \in E \setminus \{0_E\}$ tq : $u(x) = \lambda x$. On a donc : $u(x)$ et x « colinéaires ».
   (b) Un tel vecteur non nul x est appelé vep de u de vap λ.
   (c) $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est le sous-espace propre de u de valeur propre λ. C'est un sev de E.
2. **Injectivité** λ est une vap de $E \iff u - \lambda\mathrm{id}_E$ n'est pas injective. En particulier, 0 est vap de $u \iff u$ n'est pas injective.
3. **Stabilité et commutation**Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors : $E_\lambda(u)$ est v-stable (dem).
4. **Somme directe et famille de vep** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ distincts 2 à 2.
   (a) $E_{\lambda_1}(u), ..., E_{\lambda_n}(u)$ sont en somme directe (dem).
   (b) Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vep de u de vap resp $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Cette famille est libre (dem).

2) Dimension finie

Soit E un$\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire λ est une vap de $u \iff \det(\lambda\mathrm{id}_E - u) = 0$ (dem).
2. **Polynôme caractéristique et spectre d'un endomorphisme** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{id}_E - u)$ est le polynôme caractéristique de u.
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda$ est vap de $u \iff \chi_u(\lambda) = 0$.
   (c) $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des vap de u, est appelé spectre de u.
   (d) La multiplicité d'une vap est sa multiplicité en tant que racine de $\chi_u(X)$.
3. **Propriétés de $\chi_u(X)$.**
   (a) C'est un polynôme unitaire de degré $n = \dim E$.
   (b) $-\mathrm{tr}(u)$ est son coefficient de degré $n-1$
   (c) $(-1)^n \det(u)$ est son coefficient de degré 0.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u admet au plus n vap comptées avec multiplicité.
5. Soit $\chi_u(X)$ **scindé**
   (a) La somme des vap de u comptées avec multiplicité est $\mathrm{tr}(u)$.
   (b) Le produit des vap de u comptées avec leur multiplicité est $\det(u)$.

3) Cas des matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Définition** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. On appelle :
   (a) vap de A les vap de u.
   (b) vep de A les vep de u.
   (c) le spectre de A le spectre de u. Il est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
   (d) polynôme caractéristique de A le polynôme caractéristique de u : $\chi_A(X) = \chi_u(X)$.
   (e) sous-espace propre de A les sous-espaces propres de u : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ E_\lambda(A) = E_\lambda(u)$.
2. **Inversibilité** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. 0 est vap de $A \Longleftrightarrow A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. **Matrice triangulaire** Si A est triangulaire, alors les vap sont ses coefficients diagonaux. De plus, la multiplicité de chaque vap de A est le nombre de fois qu'elle apparait sur la diagonale.
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\chi_{{}^tA}(X) = \chi_A(X)$. A et sa transposée ont les mêmes vap avec les mêmes multiplicités.
5. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. A et B sont semblables $\Longrightarrow \chi_A(X) = \chi_B(X)$.
6. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, une base $\mathcal{B}$ de E, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors : $\chi_u(X) = \chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_n - A)$.

4) Endomorphismes induits

Soit E un$\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F de sev de E stable par u. On note v l'endomorphisme de F induit par u.
   (a) $\chi_v(X)$ divise $\chi_u(X)$.
   (b) $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathrm{Sp}(u)$.
   (c) Pour toute vap de v, sa multiplicité comme vap de v est inférieure ou égale à sa multiplicité comme vap de u.
   (d) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ E_\lambda(v) = F \cap E_\lambda(u)$.
2. **Inégalité entre dimension de sous-espace propre et multiplicité d'une vap** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute vap λ de u, on note m_λ sa multiplicité d_λ et la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$. On a :
   (a) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$.
   (b) $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A),\ 1 \leqslant d_\lambda \leqslant m_\lambda$.

II. Polynôme en un endomorphisme ou une matrice

1. **Polynôme en un endomorphisme et polynôme en une matrice** Soit $P(X) = a_d X^d + \dots + a_0 X^0 \in \mathbb{K}[X]$ où $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$.
   (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On pose : $P(A) = a_d A^d + \dots + a_0 A^0$ où $\left\{ \begin{array}{l} A^0 = \mathrm{I}_n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k \times A \end{array} \right.$.
   (b) Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $P(u) = a_d u^d + \dots + a_0 u^0$ où $\left\{ \begin{array}{l} u^0 = \mathrm{id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k \circ u \end{array} \right.$.
2. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ u, v \in \mathcal{L}(E),\ P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :
   (a) $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u) \in \mathcal{L}(E)$.
   (c) $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$ est un produit matriciel.
   (d) $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ est une composée d'endomorphismes.
   (e) Si A et B commutent : $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$. En particulier , $P(A)$ et $Q(A)$ commutent toujours.
   (f) Si u et v commutent : $P(u)Q(v) = Q(v)P(u)$. En particulier, $P(u)$ et $Q(v)$ commutent toujours.
3. **Polynôme annulateur d'une matrice et polynôme annulateur d'un endomorphisme** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P annule A / P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.
   (b) Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P annule u / P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.

4. **Théorème de Cayley-Hamilton** (admis)
   (a) Cas des endomorphismes : Soient E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\chi_u(X)$ annule u.
   (b) Cas des matrices : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \chi_A(X)$ annule A.
5. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors :
   (a) $\forall x \in E_\lambda(u)\ :\ [P(u)](x) = P(\lambda) \cdot x$.
   (b) C'est à dire : $E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}[P(u)]$.
   (c) Cas des matrices : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall P \in \mathbb{K}[X], E_\lambda(A) \subset E_{P(\lambda)}[P(A)]$.
6. Soient E un $\mathbb{K}$-ev , $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors : toute vap de u est racine de P.
   (a) En dimension finie : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$. *Inclusion réciproque fausse a priori !*
   (b) Cas des matrices : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$. *Inclusion réciproque fausse a priori !*
7. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors : $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables (ex).
8. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale. Alors : $P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$ (ex).

III. Diagonalisation

1. **Diagonalisation d'un endomorphisme** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. $\mathcal{B}$ est formée des vep de u.
   (b) Diagonaliser u, c'est trouver une telle base $\mathcal{B}$ et calculer la matrice de u dans cette base.
2. **Théorème : Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable** Soient E un L-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les CNS suivantes :

$$\begin{aligned}
u \text{ est diagonalisable} &\iff (1) \quad \text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ formée de vep de } u.\\
&\iff (2) \quad \text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ où la matrice } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale.}\\
&\iff (3) \quad E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).\\
&\iff (4) \quad E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u).\\
&\iff (5) \quad \dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u).\\
&\iff (6) \quad \chi_u(X) \text{ est scindé, et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ d_\lambda = m_\lambda.\\
&\iff (7) \quad \text{Il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples.}\\
&\iff (8) \quad \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda) \text{ annule } u.
\end{aligned}$$

   (1) et (2) par définition. (7) admis.
3. **Diagonalisation d'une matrice** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.
   (b) Diagonaliser A, c'est trouver deux matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$$u_A \text{ diagonalisable} \iff A \text{ est diagnonalisable}$$

5. **Méthode pour diagonaliser une matrice ou un endomorphisme** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   (a) On calcule $\chi_A(X)$. S'il est non scindé alors A non diagonalisable. Sinon on en déduit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et les multiplicités des vap.
   (b) Pour chaque vap λ, on détermine une base de $E_\lambda(A)$. Si $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A),\ \dim E_\lambda(A) < m_\lambda$, alors A non diagonalisable.
   (c) Sinon, en juxtaposant les bases des espaces propres $E_\lambda(A)$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vep de A, càd de vep de u. On a $A = PAP^{-1}$ avec, en notant $\mathcal{C}$ la base canonique :

$$\begin{cases} P = \mathcal{P}_{\mathcal{C} \to \mathcal{B}} \text{ matrice des vecteurs-colonne des vep de } A \\ D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ diagonale avec les vap comme coefficients diagonaux, dans le même ordre que les vep de } P \end{cases}$$

6. **Condition suffisante de diagonalisibilité**
   (a) Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. $\chi_u(X)$ scindé et à racines simples sur $\mathbb{K} \Longrightarrow u$ diagonalisable.
   (b) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. $\chi_A(X)$ scindé et à racines simples sur $\mathbb{K} \Longrightarrow A$ diagonalisable.
7. **Applications de la diagonalisation**
   (a) Calcul de puissances d'une matrice : Si A est diagonalisable, on a : $A^k = PD^kP^{-1}$.
   (b) Calcul des « racines carrées » d'une matrice
   — B est une racine de A si $B^2 = A \iff B^2 = PDP^{-1} \iff \exists E$ tq : $E^2 = D$ et $B = PEP^{-1}$.
   — Analyse-synthèse : on utilise le fait que $ED = EE^2 = E^2 = DE$.
   — Cette méthode peut être utilisée pour des équations autres que $B^2 = A$ (ex : $M^3 - 2M = A$).

IV. Trigonalisation

1. **Trigonalisation d'un endomorphisme** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.
   (b) Trigonaliser u, c'est trouver une telle base $\mathcal{B}$ et calculer la matrice de u dans cette base.
2. **Trigonalisation d'une matrice** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
   (b) Trigonaliser A, c'est trouver deux matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$.
3. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $U \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ triangulaire supérieure $\iff \forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$ est u-stable.
4. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. [$A$ diagonale] $\Longrightarrow$ [A diagonalisable, A triangulaire] $\Longrightarrow$ [A trigonalisable].

V. Applications des polynômes d'endomorphismes à la réduction des endomorphismes

1. **Théorème : CNS de diagonalisibilité en utilisant les polynômes d'endomorphismes** cf. assertions (7) et (8) du III.2. (idem pour les matrices)
2. **Théorème : Stabilité d'un sev et diagonalisibilité** Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u. On note $v \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par u. Si u est diagonalisable, alors v est diagonalisable.
3. **Théorème : CNS de trigonalisibilité en utilisant les polynômes d'endomorphismes** Soient E un L-ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
$$\begin{aligned} u \text{ est trigonalisable} &\iff (1)\quad u \text{ admet un polynôme scindé sur } \mathbb{K}. \\ &\iff (2)\quad \chi_u(X) \text{ est scindé sur } \mathbb{K}. \end{aligned}$$
   (idem pour les matrices)
4. **Comparaison entre la trigonalisabilité et diagonalisabilité** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) A est trigonalisable $\iff \chi_A(X)$ est scindé.
   (b) $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples $\Longrightarrow A$ est diagonalisable $\Longrightarrow \chi_A(X)$ est scindé.
5. Résolution de systèmes : $(S)\begin{cases} P(A) = 0 \\ \det(A) = x \\ \mathrm{tr}(A) = y \end{cases}$
   Les solutions sont toutes les matrices semblables à D diagonale (ou T triangulaire).

VI. Application : récurrences linéaires à coefficients constants

1. Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$
2. Soit $(u_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + ... + a_0 u_k = 0$$
3. On pose :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$
4. Puis on remarque :
$$\forall k \in \mathbb{N} : X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{pmatrix} = AX_k \text{ en posant : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

5. Par relation de récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ X_k = A^k X_0$.
6. Pour obtenir u_k, il suffit de calculer X_k, car u_k est la première coordonnée de X_k. On calcule donc les puissance de A ; pour cela on diagonalise A si c'est possible, ou on trigonalise (toujours possible sur $\mathbb{C}$). On commence par calculer $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 X^0$.

VII. Compléments

1. **Matrices nilpotentes** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) On dit que A est nilpotente si : $\exists N \in \mathbb{N},\ A^N = 0$.
   (b) Si A est nilpotente, alors $A^n = 0$ (dem : polynôme caractéristique et Cayley-Hamilton).
   (c) A est nilpotente $\iff$ $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = 0$.
2. **Théorème spectral** Toute matrice symétrique *réelle* est diagonalisable.
3. **Matrices dont toutes les lignes ou colonnes ont la même somme** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Si toutes les lignes de A ont la même somme égale à $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$.
   (b) De la même manière, si toutes les colonnes ont la même somme μ alors $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}({}^tA) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.
4. **Diagonaliser $\boldsymbol{A + \lambda \mathrm{I}_n}$** Supposons qu'on ait diagonalisé A : $A = PDP^{-1}$. Alors la diagonalisation de $A + \lambda\mathrm{I}_n$ est immédiate :
   (a) $A + \lambda\mathrm{I}_n = PDP^{-1} + \lambda P \mathrm{I}_n P^{-1} = P(D + \lambda\mathrm{I}_n)P^{-1}$ avec $D + \lambda\mathrm{I}_n$ diagonale.
   (b) Plus généralement : $\mu A + \lambda\mathrm{I}_n = P(\mu D + \lambda\mathrm{I}_n)P^{-1}$.
5. $\boldsymbol{E_0(u) = \ker(u)}$
   (a) On a : $E_0(u) \neq \{0\} \iff \ker(u) \neq \{0\}$. C'est à dire en dimension finie : $0 \in \mathrm{Sp}(u) \iff u \notin GL(E)$
   (b) De même : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ 0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
   (c) De plus, on peut calculer $\dim E_0(u)$ grâce au théorème du rang. Plus généralement : $\dim E_\lambda(u) = \dim E - \mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
6. **Cas d'une unique vap** Rappel : $\lambda\mathrm{I_n}$ commute avec toutes les matrices. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, c'est-à-dire A n'a qu'une seule vap, alors : A diagonalisable $\iff A = \lambda\mathrm{I}_n$.
7. **Diagonalisation de $\mathbf{J}_{\boldsymbol{n}}$** Rappel : J_n est la matrice remplie de 1. Elle est diagonalisable car elle est symétrique réelle. Son rang vaut 1 donc X^{n-1} divise $\chi_{\mathrm{J}_n}(X)$, car $\dim E_0(\mathrm{J}_n) = n - \mathrm{rg}(\mathrm{J}_n)$. De plus, toutes les lignes ont la même somme n. Donc $\chi_{\mathrm{J}_n}(X) = X^{n-1}(X-n)$. Ainsi, J_n est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
8. **Matrices de rang 1** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{tr}A \neq 0$ (ex).
9. **Réduction de Jordan** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. Alors A est semblable à une matrice de la forme :
   $\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_r \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1,t]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{K},\ B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_i \end{pmatrix}$
10. **Méthode pour trigonaliser une matrice**
   (a) Comme pour une diagonalisation, on détermine les vap. Si il existe une vap λ tq : $\dim E_\lambda(A) < m_\lambda$, la matrice n'est pas diagonalisable.

(b) On montre alors que la matrice est semblable à sa réduite de Jordan (les vap sur la diagonale, des 0 et des 1 juste au dessus, des 0 ailleurs).

(c) Pour cela on prend l'endomorphisme u canoniquement associé à A et on pose $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice u est la réduction de Jordan. On obtient ainsi un système. On déduit donc $P = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ telle que $A = PTP^{-1}$.

(d) Exemple de système pour une matrice 3×3 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: on a $\mathrm{Mat}_{(v_1,v_2,v_3)}(u) = T \iff \begin{cases} u(v_1) = v_1 \\ u(v_2) = v_1 + v_2 \\ u(v_3) = -v_3 \end{cases}$.

Chapitre 3 : Espaces vectoriels normés (evn)

I. Normes

1) Définitions

1. **Norme** On appelle norme sur E toute application : $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x) \\ \forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

   (a) La norme est notée N ou $\|\cdot\|$.

   (b) Si le $\mathbb{K}$-ev E est muni d'une norme, on parle de l'evn E (ou de l'evn (E, N) si on veut préciser la norme).

2. **Norme induite sous un sev** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et F un sev de E. On obtient $(F, \|\cdot\|_F)$ en posant : $\forall x \in F, \|x\|_F = \|x\|_E$.

3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On a les inégalités suivantes (dem) :

$$\begin{cases} |\ \|x\| - \|y\|\ | \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\ |\ \|x\| - \|y\|\ | \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \end{cases}$$

4. **Distance** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$ l'application :

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|y - x\| \end{array} . \text{ Elle vérifie (dem) : } \begin{cases} \forall x, y \in E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ \forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x) \\ \forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$$

5. **Boules et sphère** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ un vecteur et $r \in \mathbb{R}_+$ un réel positif. On définit :

   (a) La boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r) = \{x \in E \ /\ d(a,x) < r\}$.

   (b) La boule fermée de centre a et de rayon r : $B'(a,r) = \{x \in E \ /\ d(a,x) \leqslant r\}$.

   (c) La sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r) = \{x \in E \ /\ d(a,x) = r\}$.

2) Exemples

1. **Normes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$**

   (a) La valeur absolue $|\cdot|$ est une norme de $\mathbb{R}$.

   (b) Le module est une norme de $\mathbb{C}$.

2. **Normes sur $\mathbb{R}^n$** Pour tout $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit les normes (dem) :

   (a) $\|X\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$.

   (b) $\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

   (c) $\|X\|_\infty = \max\{\ |x_1|, ..., |x_n|\ \}$.

3. **Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$** Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Pour toute $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, on définit les normes (dem) :

(a) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$

(b) $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}.$

(c) $\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$

3) Norme associée à un produit scalaire

1. **Produit scalaire** Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est :
   (a) bilinéaire : $\begin{cases} \forall\lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall x_1,x_2,y \in E,\ \langle\lambda x_1+\mu x_2|y\rangle = \lambda\langle x_1|y\rangle + \mu\langle x_2|y\rangle \\ \forall\lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \forall x,y_1,y_2 \in E,\ \langle x|\lambda y_1+\mu y_2\rangle = \lambda\langle x|y_1\rangle + \mu\langle x|y_2\rangle \end{cases}.$
   (b) symétrique : $\forall x,y \in E,\ \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
   (c) définie positive : $\forall x \in E,\ \langle x|x\rangle \geqslant 0$ et $[\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E]$.
2. Notation : le produit scalaire de deux vecteurs x et y est traditionnellement noté $\langle x|y\rangle$ ou $(x|y)$ ou $\langle x,y\rangle$ ou $x\cdot y$.
3. **Espace préhilbertien et espace euclidien**
   (a) On appelle espace préhilbertien (réel) tout $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.
   (b) On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien de dimension finie.
4. Exemples de produits scalaires
   (a) Soit $x = (x_1,...,x_n)$ et $y = (y_1,...,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'application $(x,y) \longmapsto x_1y_1+...+x_ny_n$ est un produit scalaire appelé produit scalaire canonique.
   (b) Soient $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. L'application $(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.
5. **Notation** Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On pose : $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.
6. **Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz** Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et on note $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$. Soient $x,y \in E$. On a (dem : on considère pour tout réel t et y non nul : $\|x+ty\|^2$) :

$$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|.$$

   Cas de l'égalité :

$$|\langle x|y\rangle| = \|x\| \times \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

   On a enfin :

$$\langle x|y\rangle = \|x\| \times \|y\| \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}_+,\ x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x.$$

7. **Inégalité de Cauchy-Schwarz avec des intégrales** Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\left|\sqrt{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}.$$

8. **Théorème : Inégalité de Minkowski** ou **inégalité triangulaire pour la norme** Soit E un espace préhilibertien de produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soient $x,y \in E$. On a (dem) :

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

   Cas de l'égalité :

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}_+,\ x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x.$$

9. **Inégalité de Minkowski avec des intégrales** Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On a :

$$\sqrt{\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}.$$

10. **Corollaire de l'inégalité de Minkowski** Soit E un espace de produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Alors $\|\cdot\|$ est une norme de E, appelée norme canonique de E ou norme associée au produit scalaire de E.

4) Parties, fonctions et suites bornées

1. **Définitions** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.
   (a) Soit A une partie de E. A est bornée ssi : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$.
   (b) Soit X un ensemble et $f : X \longmapsto E$ une fonction. f est bornée ssi $\mathrm{Im}(f)$ est bornée : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M$.
   (c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée ssi : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|x_n\| \leqslant M$.
2. **Norme de $\mathcal{B}(X,E)$** Soit X non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X vers E.
   (a) $\mathcal{B}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
   (b) On définit une nouvelle norme de $\mathcal{B}(X,E)$ dans $\mathbb{R}_+$: $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|_E$.
   (c) Si X est un segment de $\mathbb{R}$ et si $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, alors $C^0([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(X,E)$. Dans ce cas : $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

5) Parties convexes

1. **Définition** Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $A \subset E$. On dit que A est une partie convexe de E si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in A.$$

   Cela signifie de géométriquement que le segment $[a,b] = \{x + t(y-x)\}_{t\in[0,1]}$ reliant x et y est inclus dans A.
   (a) Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Les sev de E sont des parties convexes de E.
   (b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Les boules ouvertes et les boules fermées de E sont des parties convexes de E.
2. **Barycentre** Soient E un ev, des vecteurs $v_1, ..., v_r \in E$ et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_r \in [0,1]$ tq : $\lambda_1 + ... + \lambda_r = 1$.
   (a) On appelle, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, (v_j, λ_j) le point v_j de poids λ_j.
   (b) On appelle barycentre à points pondérés le vecteur $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$.
   (c) Si $A \subset E$ est une partie convexe de E, alors elle est stable par barycentre à poids positifs : $v_1, ..., v_r \in A \Longrightarrow w \in A$.
   (dem : récurrence sur r)

II. Suites convergentes de vecteurs

1) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K}$.

1. **Suite convergente** Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Cette suite est convergente ssi :

$$\exists \ell \in E,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k > k_0 : \|x_k - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

   (a) Le vecteur ℓ est alors unique, appelé **limite** de la suite $(x_k)_k$ et noté : $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ ou $\lim\limits_{k} x_k$.
   (b) On dit alors que la suite $(x_k)_k$ converge ou tend vers ℓ.
   (c) Une suite non convergente est dite divergente.
2. **Formulation équivalente** Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On a : $\lim\limits_{k} x_k = \ell \Longleftrightarrow \lim\limits_{k} \|x_k - \ell\| = 0$.

2) Premières propriétés

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K}$.

1. **Toute suite convergente est bornée**.
2. Une **combinaison linéaire de suites convergentes** est **convergente**.
3. La **limite** est **linéaire**.
4. Soient $(x_k)_k, (y_k)_k \in E^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de vecteurs de E et $(\lambda_k)_k, (\mu_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de scalaires. Alors :
   (a) la suite $(\lambda_k x_k + \mu_k y_k)_k$ est convergente.

   (b) $\lim_k(\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = \left(\lim_k \lambda_k\right)\left(\lim_k x_k\right) + \left(\lim_k \mu_k\right)\left(\lim_k y_k\right)$.

5. **Convergence d'une suite extraite** Soit $(x_k)_k \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente de vecteurs de E et de limite l. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors la suite extraite $(x_{\varphi(k)})_k$ est également convergente de même limite l.

3) Théorème fondamental

1. **Théorème : Équivalence des normes en dimension finie** (admis) Soient E un $\mathbb{K}$-ev de *dimension finie*, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes de E et $(x_k)_k \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Alors :
   (a) La suite $(x_k)_k$ converge pour la norme $\|\cdot\|_1 \iff$ elle converge pour la norme $\|\cdot\|_2$.
   (b) Si $(x_k)_k$ converge, sa limite pour la norme $\|\cdot\|_1$ est égale à sa limite pour la norme $\|\cdot\|_2$.
2. **Corollaire** Soient E un $\mathbb{K}$-ev de *dimension finie* $n \in N^*$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $(x_k)_k \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On note, pour tout k, $(x_{1k}, ..., x_{nk})$ les coordonnées de x_k dans la base $\mathcal{B}$. Alors :
   (a) La suite de vecteurs $(x_k)_k$ converge $\iff$ les suites de scalaires $(x_{1k})_k, ..., (x_{nk})_k$ convergent.
   (b) Dans ce cas : $\lim_k x_k = \lim_k x_{1k}e_1 + ... + \lim_k x_{nk}e_n$.

4) Topologie d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K}$. On étudie en pratique uniquement la topologie d'ev de dimension finie.

1. **Point intérieur à une partie, point adhérent à une partie** Soit $x \in E$ un vecteur de E
   (a) On appelle l'intérieur de A l'ensemble $\mathring{A} = \{x \in E \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ B(x,\varepsilon) \subset A\}$.
   (b) On appelle l'adhérence de A l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing\}$.
   (c) On a : $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.
   (d) On appelle frontière de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. La frontière de A est parfois notée Fr A.
2. Soit $A \subset E$.
   (a) On a : $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.
   (b) Donc : $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$.
3. **Caractérisation séquentielle de l'adhérence** Soient $x \in E$ et $A \subset E$. On a :
$$x \in \overline{A} \iff \exists (a_k)_k \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_k a_k = x.$$
4. **Partie ouverte** Soit $A \subset E$.
   (a) A est un ouvert ou une partie ouverte de E ssi : $A = \mathring{A}$.
   (b) C'est-à-dire : A est un ouvert de $E \iff \forall x \in A,\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ B(x,\varepsilon) \subset A$.
5. **Partie fermée** Soit $A \subset E$.
   (a) A est un fermé ou une partie fermée de E ssi : $A = \overline{A}$.
   (b) **Caractérisation séquentielle des fermés** A est un fermé ssi : pour toute suite convergente $(a_k)_k \in A^{\mathbb{N}}, \lim_k a_k \in A$.
6. **Complémentaire d'un fermé ou d'un ouvert** Soit $A \subset E$.
   (a) Les complémentaires des ouverts sont les fermés de E : A ouvert $\iff E \setminus A$ fermé.
   (b) Les complémentaires des fermés sont les ouverts de E : A fermé $\iff E \setminus A$ ouvert.
7. **Exemples**
   (a) $\varnothing$ et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées de E.
   (b) En prenant $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, les « intervalles fermés » sont des fermés ; les « intervalles ouverts » sont des ouverts.
   (c) Les boules ouvertes de E sont des ouverts de E (dem).
   (d) Les boules fermées et les sphères de E sont des fermés de E (dem).
8. **Théorème** Soient E un ev de *dimension finie* et A une partie de E. Alors (dem) :
   (a) l'intérieur de A
   (b) l'adhérence de A
   (c) la frontière de A
   (d) le fait que A soit ouvert
   (e) le fait que A soit fermé
   ne dépendent pas de la norme de E.

III. Limites de fonctions et continuité

1) Définition

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn.
Soit $A \subset E$.
Soit $f : A \longrightarrow F$ une fonction.

1. **Limite d'une fonction** Soit $a \subset \overline{A}$. On dit que f admet une limite en a ssi :

$$\exists \ell \in E,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in A : \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

   Formulation avec les boules fermées :

$$\exists \ell \in E,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* : f(A \cap B'(a, \delta)) \subset B'(\ell, \varepsilon).$$

   (a) Un tel vecteur ℓ est unique, appelé **limite** de f en a et noté $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

   (b) On dit que f tend vers ℓ en a.

2. **Formulation équivalente** Soit $a \in \overline{A}$. Soit $\ell \in E$. On a : $\lim\limits_{a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{a} \|f(x) - \ell\|_F = 0$.

3. **Continuité d'une fonction** Soit $a \in A$.

   (a) On dit que f est continue en a ssi : $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$.

   (b) On dit que f est continue sur A ssi : f est continue en tout point $a \in A$.

2) Opérations sur les limites et sur les fonctions continues

1. **Composée de limites** Soient E, F et G trois evn ; $A \subset E$ et $B \subset F$; $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow G$ deux fonctions. On suppose $\mathrm{Im}(f) \subset B$. Soient $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $c \in G$. On a :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y \to b} g(y) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$$

2. **Composée de fonctions continues** (même notation)

   (a) Soit $a \in A$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

   (b) Si f est continue sur A et g est continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

3. **Opérations algébriques sur les limites** Soient E et F deux evn. Soit $A \in E$. Soient λ_1 et λ_2 deux formes linéaires de A dans $\mathbb{K}$. Soient $f_1$et f_2 deux fonctions de A dans F. Soient $a \in \overline{A}$, μ_1, μ_2 deux scalaires et l_1, l_2 deux vecteurs.

   (a) Si : $\lim\limits_{x \to a} \lambda_1(x) = \mu_1$ et $\lim\limits_{x \to a} \lambda_2(x) = \mu_2$ et $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = l_2$

   (b) Alors : $\lim\limits_{x \to a} \big(\lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)\big) = \mu_1 l_1 + \mu_2 l_2$.

4. **Opérations algébriques sur les fonctions continues** (même notation)

   (a) Soit $a \in A$. Si λ_1, λ_2, f_1 et f_2 sont continues en a, alors $x \mapsto \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$ est continue en a.

   (b) Si λ_1, λ_2, f_1 et f_2 sont continues sur A, alors $x \mapsto \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x)$ est continue sur A.

3) Caractérisations séquentielles de la limite et de la continuité

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn.
Soit $A \subset E$.
Soit $f : A \longrightarrow F$ une fonction.

1. **Caractérisation séquentielle de la limite** Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. On a :

$$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff \forall (a_k)_k \in A^{\mathbb{N}},\ \big(\lim\limits_{k} a_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k} f(a_k) = l\big)$$

   La caractérisation séquentielle de la limite s'applique aussi dans les cas où a ou l sont « infinies ».

2. **Caractérisation séquentielle de la continuité**

(a) Soit $a \in A$. f est continue en $a \iff \forall (a_k)_k \in A^{\mathbb{N}},\ \big(\lim\limits_k a_k = a \Rightarrow \lim\limits_k f(a_k) = f(a)\big)$

(b) f est continue sur $A \iff$ pour toute suite convergente $(a_k)_k \in A^{\mathbb{N}}$ dont la limite appartient à A, $\lim\limits_k f(a_k) = f(\lim\limits_k a_k)$

3. **Dimension finie** On suppose F de dimension finie n non nulle. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de F. Soient $f_1, ..., f_n$ des formes linéaires telles que : $\forall x \in A, f(x) = f_1(x)e_1 + ... + f_n(x)e_n$.
   (a) Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. f tend vers l en $a \iff$ toutes les fonctions f_j tendent vers un scalaire λ_j en a. On a alors $l = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$.
   (b) Soit $a \in A$. f est continue en $a \iff$ toutes les f_j sont continues en a.
   (c) f est continue sur $A \iff$ toutes les f_j sont continues sur A.

4) Continuité et topologie

1. **Images réciproques** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de E.
   (b) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E.
   (c) L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est un fermé de E.
2. Plus généralement, soient E et F deux evn, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction continue et définie sur E.
   (a) Pour tout $B \in F$ ouvert, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E.
   (b) Pour tout $B \in F$ fermé, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.
3. **Théorème** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn de dimension finie. Soit $A \subset E$ une partie non vide et bornée de E. Soit $f : A \longmapsto \mathbb{R}$.
   (a) Alors : f est bornée et atteint ses bornes.
   (b) Càd : f admet un maximum et un minimum.
4. **Compact** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toute partie de E fermée et bornée est appelée *compact* de E.

5) Fonctions lipschitziennes

1. **Fonction lipschitzienne** Soient E et F deux evn sur $\mathbb{K}$. Soit $A \subset E$. Soit $f : A \longmapsto F$. Soit $K \in \mathbb{R}_+$.
   (a) On dit que f est une fonction lipschitzienne si on a : $\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leqslant K\|y - x\|_E$.
   (b) f est alors dite K-lipschitzienne.
   (c) Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur I alors : f est K-lipschitzienne $\iff |f'| \leqslant K$.
2. Toute **fonction lipschitzienne** est **continue**.
3. La norme de E est 1-lipschitzienne.
4. Soient E et F deux evn. Soit $\boldsymbol{u \in \mathcal{L}(E, F)}$. Soit $K \in \mathbb{R}_+$. u est K-lipschitzienne ssi : $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
5. **Théorème** Soient E, F deux evn. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors u est lipschitzienne, donc continue.

6) Autres exemples

1. **Continuité du déterminant**
   (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continu.
   (b) Si E est un ev de dimension finie alors $\det : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continu.
   (c) Si E est un ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ est une base de E, alors $\det_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est continu.
   (d) Ainsi, $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ car $M_n(\mathbb{K}) \setminus GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 0\}$ est un fermé.
2. **Fonction polynomiale** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $f : E \longmapsto \mathbb{K}$.
   (a) On dit que f est polynomiale s'il existe une partie finie $I \subset \mathbb{N}^n$ et une famille $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que, pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$, on ait :

$$f(x) = \sum_{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I} \lambda_{(\alpha_1, ..., \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

(b) Toute **application polynomiale en dimension finie** est **continue**.

3. **Fonction multilinéaire** Soient $E_1, ..., E_r$ et F des $\mathbb{K}$-ev. Soit f une fonction de $E_1 \times ... \times E_r$ dans F qui à $(x_1, ..., x_r)$ associe $f(x_1, ..., x_r)$. On dit que f est multilinéaire (en particulier r-linéaire) si :

$$\forall j \in [\![1; r]\!], \forall \lambda, \mu, \forall y_i \in E_i, f(x_1, ..., \lambda x_i + \mu y_i, ..., x_r) = \lambda f(x_1, ..., x_i, ..., x_r) + \mu f(x_1, ..., y_i, ..., x_r).$$

(a) Toute application linéaire est 1-linéaire.

(b) Tout produit scalaire est 2-linéaire (bilinéaire).

(c) Le produit matriciel et la composition des applications linéaires sont des applications bilinéaires.

(d) L'application : $(A, B, C) \in M_n(\mathbb{K})^3 \longmapsto ABC \in M_n(\mathbb{K})$ est trilinéaire.

(e) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E. La fonction $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longmapsto K$ est n-linéaire.

(f) Toute **fonction multilinéaire en dimension finie** est **continue**.

CHAPITRE 4 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

I. Produit scalaire

1. **Produit scalaire** Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est :
   (a) bilinéaire : $\begin{cases} \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x_1,x_2,y\in E,\ \langle \lambda x_1+\mu x_2|y\rangle = \lambda\langle x_1|y\rangle+\mu\langle x_2|y\rangle \\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall x,y_1,y_2\in E,\ \langle x|\lambda y_1+\mu y_2\rangle = \lambda\langle x|y_1\rangle+\mu\langle x|y_2\rangle \end{cases}.$
   (b) symétrique : $\forall x,y\in E,\ \langle x|y\rangle=\langle y|x\rangle$.
   (c) définie positive : $\forall x\in E,\ \langle x|x\rangle\geqslant 0$ et $[\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x=0_E]$.
2. **Espace préhilbertien et espace euclidien**
   (a) Un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.
   (b) Un espace préhilbertien de dimension finie est dit espace euclidien.
3. **Exemples de référence**
   (a) Soient x et y deux vecteurs de coordonnées $(x_1,...,x_n)$ et $(y_1,...,y_n)$ qui peuvent être écrites dans les matrices colonnes X et Y de $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$. On appelle **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$** l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left[\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\right] & \longmapsto & x_1y_1+...+x_ny_n \end{array} \quad \text{qui s'écrit également} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & {}^tXY \end{array}$$

   (b) L'application suivante est un produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

   — Sur $E=\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ où $a<b\in\mathbb{R}$.
   — Sur E l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I de bornes $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

   (c) L'application suivante est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longrightarrow & \mathrm{tr}({}^tA\times B)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} \end{array}$$

4. **Norme associée à un produit scalaire**
   (a) **Norme** Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$. L'application $x\longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E.
   (b) **Théorème de Cauchy-Schwarz** (rappel) $|\langle x|y\rangle|\leqslant\|x\|\times\|y\|$. Égalité ssi x et y colinéaires. Égalité sans la valeur absolue ssi x et y colinéaires et de même sens.
   (c) **Inégalité de Minkowski** (rappel) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Égalité ssi x et y colinéaires et de même sens.
5. **Propriétés calculatoires** Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $x,y\in E$. On note $\|\cdot\|$ la norme.
   (a) **Identités remarquables** $\begin{cases} \|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x|y\rangle+\|y\|^2 \\ \|x-y\|^2=\|x\|^2-2\langle x|y\rangle+\|y\|^2\end{cases}$
   (b) **Identité du parallélogramme** $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$
   (c) **Identités de polarisation** $\begin{cases} \langle x|y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right) \\ \langle x|y\rangle=\dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\end{cases}$

II. Orthogonalité, base orthonormale (BON)

On considère $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ et la norme canonique $\|\cdot\|$.

1) Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires, BON

1. **Définitions**
   (a) Un vecteur x de E est **unitaire** si $\|x\| = 1$.
   (b) Deux vecteurs x, y de E sont **orthogonaux** si $\langle x|y\rangle = 0$. On note $x \perp y$.
   (c) Une famille de $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ est une **famille orthogonale** si $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i|x_j\rangle = 0$.
   (d) Une famille de $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ est une **famille orthonormale** si $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$.
   (e) Une famille de vecteurs de E^n est une **base orthonormale** si c'est une famille orthonormale et une base de E.
2. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, pour les produits scalaires canoniques, sont des BON.
3. **Théorème de Pythagore** Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. On a :
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$
4. **Orthogonalité et famille libre** Soit $\mathcal{F}$ une famille orthogonale de vecteurs de E tous non nuls. Alors $\mathcal{F}$ est libre.
5. **Dimension finie** On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathcal{F} \in E^n$ est une famille orthogonale, alors $\mathcal{F}$ est une BON.
6. **Théorème** Tout espace euclidien admet une BON.

2) Calculs dans une BON

On suppose $\dim E = n$ et que $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ est une **BON** de E.

1. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées X et Y dans $\mathcal{B}$.
   (a) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x|e_i\rangle$.
   (b) $\langle x|y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$.
   (c) $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^tXX}$.
   (d) $\forall x \in E,\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i$.
2. **Matrice d'une application linéaire dans une BON** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u(e_1)|e_1\rangle & \cdots & \langle u(e_n)|e_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u(e_1)|e_n\rangle & \cdots & \langle u(e_n)|e_n\rangle \end{pmatrix}$$

3) Sous-espaces vectoriels orthogonaux

1. **Sev orthogonaux** Soient F et G deux sev de E. F et G sont orthogonaux si : $\forall x \in F, \forall y \in G,\ x \perp y$. On note $F \perp G$.
2. Si $x \perp y$, alors $\mathrm{Vect}(x) \perp \mathrm{Vect}(y)$.
3. $\{0_E\}$ est ortogonal à tous les sev de E.
4. **Orthogonal d'un sev** Soit F un sev de E. On appelle orthogonal de F l'ensemble : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}$.
5. **Propriétés**
   (a) $F^\perp$ est un sev de E.
   (b) $F \perp F^\perp$.

   (c) $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.
   (d) $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
   (e) $F \perp G \iff F \subset G^{\perp} \iff G \subset F^{\perp}$.
6. **Propriétés en dimension finie** On suppose E de dimension finie.
   (a) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
   (b) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
   (c) $F \subset G \iff G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

4) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

1. **Supplémentaire orthogonal** Soit F un sev de *dimension finie* dans E (de dimension quelconque). On a (dem) :
$$E = F \oplus F^{\perp}.$$
2. **Projection orthogonale** La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée projection orthogonale sur F. Si $(e_1, ..., e_r)$ est une BON de F, elle est donnée par (dem) :
$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle x|e_k\rangle e_k.$$
3. **Distance à un sev** Soient $x \in E$ et F un sev de E. On appelle la distance de x à F est : $d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| \geqslant 0$.
4. **Distance en dimension finie** Soit F un sev de dimension finie de E. On a :
   (a) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.
   (b) $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.
   (dem)
5. **Inégalité de Bessel** Si F est de dimension finie, alors $\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$.

5) Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème
On suppose que E est de dimension finie.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, que l'on ne suppose pas orthonormale.
Alors il existe une BON $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ de E telle que :
1. $\forall j \in [\![1, n]\!],\ e'_j \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$
2. C'est-à-dire : la matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.

Démonstration : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
On pose :
$$\begin{cases} e'_1 &=& \dfrac{e_1}{\|e_1\|} \\ e'_2 &=& \dfrac{e_2 - \langle e_2|e'_1\rangle e'_1}{\|e_2 - \langle e_2|e'_1\rangle e'_1\|} \\ e'_3 &=& \dfrac{e_3 - \langle e_3|e'_1\rangle e'_1 - \langle e_3|e'_2\rangle e'_2}{\|e_3 - \langle e_3|e'_1\rangle e'_1 - \langle e_3|e'_2\rangle e'_2\|} \\ & \vdots & \\ e'_k &=& \dfrac{e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k|e'_j\rangle e'_j}{\left\| e_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k|e'_j\rangle e'_j \right\|} \end{cases}$$
Dans ce cas :
1. $\forall k \in [\![1, n]\!], e'_k \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$
2. $\forall k \in [\![1, n]\!], e'_k$ est unitaire.
3. les e_k sont deux à deux orthogonaux.

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ (e'_1, ..., e'_k)$ est une BON de $\mathrm{Vect}(e_k, ..., e_k)$.

6) Formes linéaires sur un espace euclidien

On considère un espace euclidien E de dimension n.

1. **Théorème** Soit $\ell \in E^*$ une forme linéaire sur E. On a (dem) :
$$\exists!\, v \in E,\ \forall x \in E,\ \ell(x) = \langle v|x\rangle.$$
2. Il existe alors un isomorphisme canonique entre E et E^*.
3. **Vecteur normal à un hyperplan** Soit H un hyperplan de E.
   (a) On appelle vecteur normal à H tout vecteur non nul $v \in E$ tel que $\forall x \in E,\ x \in H \iff v \perp x$.
   (b) Un tel vecteur caractérise H. En effet, en notant $(v_1, ..., v_n)$ les coordonnées de v dans une BON $\mathcal{B}$ de E, alors v est normal à H ssi H admet l'équation cartésienne dans $\mathcal{B}$: $v_1x_1 + \cdots + v_nx_n = 0$.

III. Automorphismes ortogonaux

On considère $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension n et la norme canonique $\|\cdot\|$.

1) Groupe orthogonal

1. **Conservation de la norme, conservation du produit scalaire** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :
$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle \iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$
2. **Définitions** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Si u conserve le produit scalaire (ou la norme), on dit que u est un **automorphisme orthogonal**, ou une **isométrie vectorielle** de E.
   (b) L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est le **groupe orthogonal** de E, noté $\mathrm{O}(E)$.
   (c) On a : $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.
3. **Symétrie orthogonale, réflexion** Soit $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On a :
   (a) $s \in \mathrm{O}(E) \iff F \perp G$ (dem).
   (b) On dit dans ce cas que s est une symétrie orthogonale.
   (c) Si de plus F est un hyperplan de E, alors on dit que s est une réflexion.
4. **Cas des matrices**
   (a) $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (b) On note alors $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou $M \in \mathrm{O}(n)$.
   (c) On a : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
5. **Conservation de la BON** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une BON de E. On a : $u \in \mathrm{O}(E) \iff (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une BON de E (càd l'image d'une BON par u est une BON).
6. **Corollaire** $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si la famille de ses vecteurs-colonne forme une BON de $\mathbb{R}^n$.
7. **Lemme** Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une BON de E et $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note M la matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$. On a :
   (a) ${}^tMM = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \cdots & \langle x_1|x_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n|x_1\rangle & \cdots & \langle x_n|x_n\rangle \end{pmatrix}$
   (b) Ainsi, $\mathcal{F}$ est une BON de $E \iff {}^tMM = I_n$.
8. **Théorème** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a :
$$M \in \mathrm{O}(E) \iff {}^tMM = I_n.$$
9. Les matrices orthogonales sont les matrices de passage d'une BON à une autre BON.
10. **Matrices des automorphismes orthogonaux dans une BON** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une BON de E. On a :
$$u \in \mathrm{O}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$
11. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Soit F un sev de E. On a : F est u-stable $\Longrightarrow F^\perp$ est u-stable.

2) Groupe spécial orthogonal

1. **Déterminant d'un automorphisme orthogonal**
   (a) $\forall u \in \mathrm{O}(E),\ \det(u) = 1$ ou -1.
   (b) $\forall M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(M) = 1$ ou -1.
2. **Groupe spécial orthogonal**
   (a) On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble : $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}^+(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$.
   (b) On note aussi $\mathrm{O}^-(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$.
3. **Groupe spécial orthogonal d'ordre n**
   (a) On appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n l'ensemble : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{O}^+(n) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$.
   (b) On note aussi $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = -1\}$.
4. On dit parfois que les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ et de $\mathrm{O}^+(n)$ sont positifs et que ceux de $\mathrm{O}^-(E)$ et de $\mathrm{O}^-(n)$ sont négatifs.

IV. Automorphismes en dimension 2 ou 3

1) Espaces euclidiens orientés de dimension 2 ou 3

Soit E un espace euclidien de dimension $n = 2$ ou 3.

1. On appelle **orientation** de E le choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E. Si $\mathcal{B}$ est une autre base orthonormale, on dit que :
   (a) $\mathcal{B}$ est une base orthonormale **directe** si $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = 1$.
   (b) $\mathcal{B}$ est une base orthonormale **indirecte** si $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = -1$.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une BOND et $\mathcal{B}$ une BON. Alors $\mathcal{B}$ est une BOND $\iff$ $\det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = 1$.
3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $\mathcal{B}_1$ une BOND de E. On pose $M = \det \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}}$. ON a :
$$\mathcal{B} \text{ est une BOND} \iff \begin{cases} {}^t M M = I_n \\ \det M = 1 \end{cases}$$
4. **Produit mixte** Soit $\mathcal{B}_1$ une BOND de E. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Le produit mixte de cette famille est : $\det_{\mathcal{B}_1}(x_1, ..., x_n) = [x_1, ..., x_n]$. Ce déterminant ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}_1$.
5. **Produit vectoriel** On suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension 3. Soient $x, y \in E$. L'application :
$$\ell : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & [x, y, z] \end{array}$$
   (a) ℓ est une forme linéaire. Il existe donc un unique vecteur v tel que $\forall z \in E,\ [x, y, z] = \langle v | z \rangle$.
   (b) Cet unique vecteur v est appelé produit vectoriel de x et y, noté $x \wedge y$.
   (c) On note (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) les coordonnées de x et y dans une BOND de E. Alors les coordonnées (v_1, v_2, v_3) de $v = x \wedge y$ sont :
$$v_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad v_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \qquad v_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

2) Automorphismes orthogonaux du plan

On considère un plan euclidien orienté E.

1. **Théorème : formes des matrices orthogonales de O(2)**
   (a) Les éléments de $\mathrm{SO}(2)$ sont les matrices de la forme : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
   (b) Les éléments de $\mathrm{O}^-(2)$ sont les matrices de la forme : $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

2. **Automorphismes positifs du plan euclidien : les rotations** Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$.
   (a) $\exists\theta \in \mathbb{R}, \forall\mathcal{B}$ BOND de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)$. On dit que u est la rotation d'angle θ.
   (b) L'application $R : \theta \longmapsto R(\theta)$ est une surjection.
   (c) $R(\theta_1) \times R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. En particulier, les matrices de $\mathrm{SO}(2)$ commutent 2 à 2.
   (d) Soit e un vecteur unitaire de E. On a : $\begin{cases} \cos\theta = \langle e|u(e)\rangle \\ \sin\theta = [e, u(e)] \end{cases}$.
3. **Automorphismes négatifs du plan euclidien : les réflexions** Les éléments de $\mathrm{O}^-(E)$ sont les réflexions de E.

3) Automorphismes orthogonaux de l'espace

On considère un espace euclidien orienté E de dimension 3.

1. **Rotation d'axe orienté** Soit e un vecteur unitaire de E. On pose $\Delta = \mathrm{Vect}(e)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Il existe un unique endomorphisme de E dont la matrice dans *toute* BOND (e_1, e_2, e) de E est : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Cet endomorphisme est appelé rotation d'axe Δ orienté par e et d'angle θ.
2. **Propriétés** Soit u la rotation d'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(e)$ orienté par e et d'angle θ. Alors :
   (a) $\theta \not\equiv 0\ [2\pi] \Longrightarrow \Delta = \ker(u - \mathrm{id}) = E_1(u)$.
   (b) $\mathrm{tr}(u) = 2\cos\theta + 1$.
   (c) $\forall x \in \Delta^\perp,\ u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)e \wedge x$.
   (d) $\forall x \in \Delta^\perp,\ \|x\| = 1 \Longrightarrow [e, x, u(x)] = \sin\theta$.
3. **Théorème : réduction en BON d'une isométrie** Soit $u \in \mathrm{O}(E)$.
   Alors il existe une BON $\mathcal{B}$ de E où la matrice de u est
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a^2 + b^2 = 1$$
4. **Théorème** Les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ sont les rotations.

V. Endomorphismes symétriques

1) Définition

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un **endomorphisme symétrique** si :
   $$\forall x, y \in E,\ \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle.$$
2. **Exemples**
   (a) Les homothéties de E sont des endomorphismes symétriques.
   (b) Si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$, alors le projecteur sur F parallèlement à G et la symétrie par rapport à F parallèlement à G sont des endomorphismes symétriques.
3. Notons $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques (non officielle). On a : $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
4. **Matrices des endomorphismes symétriques dans une BON** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une **BON** de E. On a (dem) :
   $$u \in \mathcal{S}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est une matrice symétrique.}$$

2) Théorème spectral

1. **Théorème spectral** Soit u un endomorphisme de E.
   $$u \in \mathcal{S}(E) \iff \text{Il existe une BON de } E \text{ formée de vep de } u \text{, càd } u \text{ est diagonalisable dans une BON.}$$
2. **Corollaire : cas des matrices** Soit $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
   Alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que (dem) :
   $$S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$$

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 5 : Séries numériques

I. Généralités

1) Définitions et notations

1. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On note la **série de terme général $\boldsymbol{u_n}$** : $\sum_n u_n$.
2. On définit alors la **suite des somme partielles de la série :** $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
3. **Convergence** On dit que $\sum_n u_n$ est convergente si $(S_n)_n$ est convergente.
4. On définit alors la **somme de la série :** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad$ et la suite des **restes :** $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2) Divergence grossière

1. **Condition nécessaire de convergence de la série** Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a : $\sum_n u_n$ convergente $\Longrightarrow \lim_n u_n = 0$.
2. Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_n u_n$ est dite **grossièrement divergente**.

3) Exemples de référence

1. **Série géométrique** $\sum_n u_n$ est une série géométrique si $\exists\, q \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$.
   (a) Cette série est convergente $\iff |q| < 1$.
   (b) Dans ce cas, sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.
   (c) Si $|q| \geqslant 1$, la série est grossièrement divergente.
2. **Série de Riemann** $\sum_n u_n$ est une série de Riemann si pour tout entier n, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec α un réel.

(a) Cette série est convergente $\iff \alpha > 1$.
(b) Cette série est grossièrement divergente $\iff \alpha \leqslant 0$.
(c) Si $\alpha = 1$ alors la série est divergente. Elle est appelée série harmonique.

II. Séries à termes positifs

1. **Série à terme positifs** La série $\sum_n u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. **Théorème** Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
3. **Théorème de comparaison des séries à termes positifs** Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries *à termes positifs*.

   (a) Si $\begin{cases} u_n = \mathcal{O}(v_n) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \\ \sum_n v_n \text{ est convergente} \end{cases}$ Alors : $\sum_n u_n$ est convergente.

   (b) Si $u_n \sim v_n$ quand n tend vers $+\infty$, alors : $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

III. Séries absolument convergentes

1. **Convergence absolue** On dit que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_n |u_n|$ est convergente.
2. Si $\sum_n u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
3. **Semi-convergence** Une série qui est convergente mais pas absolument convergente est dite semi-convergente.
4. **Théorème** Soient $\sum_n u_n$ une série à termes réels ou complexes et $\sum_n v_n$ une série *à termes positifs*.

   Si $\begin{cases} u_n = \mathcal{O}(v_n) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \\ \sum_n v_n \text{ est convergente} \end{cases}$ Alors : $\sum_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

IV. Compléments

1) Règle de Stirling

Théorème (admis) Quand n tend vers l'infini, on a : $n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

2) Règle de d'Alembert

1. **Théorème : Règle de d'Alembert** (admis) Soit $\sum_n u_n$ une série à termes strictement positifs. Soit $l \in [0, +\infty]$.
   - On suppose : $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.
   - Alors :
     (a) Si $\ell < 1$ alors la série converge.
     (b) Si $\ell = 1$ alors on ne peut pas conclure.
     (c) Si $\ell > 1$ alors la est grossièrement divergente.
2. **Exponentielle** Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Sa somme est appelée exponentielle de z et est notée $\exp(z)$ ou e^z.

(a) On définit ainsi la fonction exp : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \end{array}$

(b) On a : $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

3) Produits de Cauchy

1. **Rappels calculatoires**

   (a) $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$.

   (b) $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k\right) \times \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k X^k\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \left(\displaystyle\sum_{j+i=k} a_i b_j\right) X^k$.

2. **Produit de Cauchy** Soient $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ deux séries. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\displaystyle\sum_n w_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

3. **Théorème** (admis) Soient $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ deux séries.
   - On suppose : $\displaystyle\sum_n u_n$ et $\displaystyle\sum_n v_n$ sont absolument convergentes.
   - Alors :

     (a) Leur produit de Cauchy $\displaystyle\sum_n w_n$ est absolument convergent.

     (b) On a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

4. **Propriétés de la fonction exp** Avec le produit de Cauchy, on montre :

   (a) $e^0 = 1$

   (b) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

   (c) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

4) Séries alternées

1. **Série alternée** Une série alternée est une série de la forme $\displaystyle\sum_n (-1)^n \alpha_n$ où $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels de signe constant.

2. **Théorème : Critère spécial des séries alternées (CSSA)** Soit $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (dem : suites adjacentes, suites extraites).
   - On suppose :

     (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \geqslant 0$.

     (b) $(\alpha_n)_n$ décroissante.

     (c) $\lim_n \alpha_n = 0$.
   - Alors :

     (a) $\displaystyle\sum_n (-1)^n \alpha_n$ est convergente.

     (b) Majoration du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant \alpha_{n+1}$.

5) Rappels

1. **Théorème : Convergence de deux suites adjacentes** Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels.
   — On suppose que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, c'est-à-dire :
   (a) $(a_n)_n$ est croissante.
   (b) $(b_n)_n$ est décroissante.
   (c) $\lim\limits_n (b_n - a_n) = 0$.
   — Alors :
   (a) $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes.
   (b) $\lim\limits_n a_n = \lim\limits_n b_n$.
2. **Séries téléscopiques** Soit $(v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$. On a :
   (a) $\sum\limits_n u_n$ est convergente $\Longleftrightarrow$ $(v_n)_n$ est convergente.
   (b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - v_0$.
   (à redémontrer lors de l'exercice)

CHAPITRE 6 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

I. Suites et séries de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. **Suite de fonctions** On appelle suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
2. **Série de fonctions** Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions, on lui associe la série de fonctions $\sum\limits_n f_n$.
3. **Convergence simple** Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   — Cas des suites de fonctions :
   (a) On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f si : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x)$.
   (b) On dit alors que f est la **limite simple** de $(f_n)_n$.
   — Cas des séries de fonctions :
   (a) On dit que $\sum\limits_n f_n$ converge simplement vers S si : $\forall x \in I, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$.
   (b) On dit alors que S est la **somme** de $\sum\limits_n f_n$.
4. On a : $\sum\limits_n f_n$ est simplement convergente sur $I \Longrightarrow (f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.
5. **Convergence uniforme d'une suite de fonction** Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.
   (a) On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
   (b) On dit que f est la **limite uniforme** de $(f_n)_n$.
6. **Différence entre covergence simple et convergence uniforme** On a :
   (a) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} f \Longleftrightarrow \forall x \in I,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N_x \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_x,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, l'entier N_x dépend de x.
   (b) Pour la convergence uniforme, x n'est pas fixé.
7. **Formulation équivalente de la convergence uniforme** Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions bornées).

   (b) $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
- Alors :
   (a) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f \iff \lim\limits_n \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   (b) Si on est dans l'evn $\big(\mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty\big)$, on a : $f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f \iff \lim\limits_n \|f_n - f\|_\infty = 0 \iff \lim\limits_n f_n = f$.

8. **Convergence uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions** Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I si on a : pour tout segment de $S \subset I$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.
9. On a : $f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} f$.
10. **Cas des séries de fonctions** Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Soit $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$. On a :
    (a) $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} S \iff S_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} S$.
    (b) $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} S \iff S_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} S$.
    (c) On dit que $\sum\limits_n f_n$ **converge normalement** si la série $\sum\limits_n \|f_n\|_\infty$ est convergente.
11. On a :
    (a) $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} S \Longrightarrow f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} 0$.
    (b) $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} S \Longrightarrow f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} 0$.
    (c) $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} S \Longrightarrow f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} 0$.
12. On a : $\sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CN}} S \Longrightarrow \sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} S \Longrightarrow \sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} S \Longrightarrow \sum\limits_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} S$.
13. En pratique, pour montrer une convergence uniforme, on utilise :
    (a) La convergence normale.
    (b) $\lim\limits_n \|S_n - S\|_\infty = 0$.
    (c) La majoration du reste du CSSA.
14. Pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément, on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite (cf. Théorèmes).

II. Théorèmes

1) Limite et continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.

1. **Théorème de la continuité de la limite uniforme**
   - On suppose :
     (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur I.
     (b) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f$, où $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   - Alors : f est continue.
     « Une limite uniforme de fonctions continues est continue. »
2. **Corollaire : Généralisation**
   - On suppose :
     (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur I.

   (b) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} f$, où $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
 — Alors : f est continue.

3. **Corollaire : Cas des séries de fonctions**
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur I.
   (b) $\sum_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CUS}} S$, où $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   — Alors : S est continue.
4. **Théorème de la double limite** Soit $a \in [-\infty, +\infty]$, avec $a \in \overline{I}$ si $a \in \mathbb{R}$ ou I non majoré (minoré) si $a = +\infty$ $(-\infty)$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ admet une limite finie en a.
   (b) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} f$
   — Alors :
   (a) f admet une limite finie en a.
   (b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right]$.
   — Ainsi :
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\lim\limits_{x\to+a} f_n(x)\right]$
5. **Corollaire : Théorème de la double limite pour les séries de fonctions** Mêmes notations. Soit $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ admet une limite finie en a.
   (b) $\sum_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CU}} S$
   — Alors :
   (a) S admet une limite finie en a.
   (b) $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$.
   — Ainsi :
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$

2) Interversion limite-intégrale

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.
Soit $S : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

1. **Théorème : Interversion limite-intégrale**
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue sur $[a,b]$.
   (b) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} f$
   — Alors :
   (a) f est continue sur $[a,b]$ et donc intégrable sur $[a,b]$.
   (b) $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$.
   — Ainsi :

   (c) $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$

2. **Corollaire : Interversion somme infinie-intégrale**
   — On suppose :
   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est continue sur $[a,b]$.
   (b) $\displaystyle\sum_n f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{\text{CU}} S$
   — Alors :
   (a) S est continue sur $[a,b]$ et donc intégrable sur $[a,b]$.
   (b) $\displaystyle\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$
   — Ainsi :
   (c) $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.$

3) Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

1. **Théorème** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions. (dem)
   — On suppose :
   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} f$
   (c) $f_n' \xrightarrow[I]{\text{CUS}} g$
   — Alors :
   (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) $f' = g$.
2. **Corollaire** Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soient $g_0, ..., g_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
   (b) $\forall j\in[\![0,k-1]\!],\ f_n^{(j)} \xrightarrow[I]{\text{CS}} g_j$
   (c) $f_n^{(k)} \xrightarrow[I]{\text{CUS}} g_k$
   — Alors :
   (a) g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$.
   (b) $\forall j\in[\![0,k]\!],\ g_0^{(j)} = g_j$.
3. **Théorème : Dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions** Soit $S : I \longrightarrow \mathbb{K}$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n\in\mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) $\displaystyle\sum_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} S$
   (c) $\displaystyle\sum_n f_n'$ CUS de I.
   — Alors :
   (a) S est de classe $\mathcal{C}^1$.

   (b) $\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

4. **Théorème** Soit $k \in \mathbb{N}$.
   — On suppose :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
   (b) $\forall j \in [\![0, k-1]\!],\ \sum_n f_n^{(j)}$ CS sur I.
   (c) $\sum_n f_n^{(k)}$ CUS de I.
   — Alors :
   (a) La somme S de la série de fonctions $\sum_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
   (b) $\forall j \in [\![0, k]\!],\ \forall x \in I,\ S^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$.

Chapitre 7 : Séries entières

On pose : $\forall R \in \mathbb{R}_+,\quad \begin{cases} D(O,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} & \text{le disque ouvert de rayon } R. \\ D'(O,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\} & \text{le disque fermé de rayon } R. \end{cases}$

I. Rayon et convergence

1. **Série entière** Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
   (a) On note (abusivement) $\sum_n a_n z^n$ la série de fonction $\sum_n f_n$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ f_n(z) = a_n z^n$.
   (b) Cette série de fonction est appelée **série entière** associée à la suite $(a_n)_n$.
   (c) On dit que $(a_n)_n$ est son coefficient de degré n.
2. **Lemme d'Abel** (dem) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
   — On suppose : $(a_n z_0^n)_n$ bornée.
   — Alors : $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z| < |z_0| \Longrightarrow \sum_n a_n z^n$ AC.
3. **Rayon de convergence** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière.
   (a) Si $\{r \in \mathbb{R}_+* \mid (a_n r^n)_n$ est bornée$\}$ est non majoré, on pose $R = +\infty$.
   (b) Sinon on pose $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_n$ est bornée$\}$.
   (c) On dit que R est le **rayon de convergence** de $\sum_n a_n z^n$. On a : $R \in [0, +\infty]$.
   (d) En particulier :
   — $R = 0 \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n r^n)_n$ non bornée.
   — $R = +\infty \iff \forall r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_n$ est bornée.
4. **Théorème** (dem) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On note R son RdC. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
   (a) Si $|z_0| < R$, alors $\sum_n a_n z_0^n$ AC.
   (b) Si $|z_0| = R$, alors on ne peut pas conclure.
   (c) Si $|z_0| > R$, alors $\sum_n a_n z_0^n$ GRD.
   (d) Le disque ouvert $D(O, R)$ est appelé **disque ouvert de convergence**.
   (e) Si $R \neq +\infty$, le cercle $S(O, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ est appelé **cercle d'incertitude**.
5. **Implications à retenir**

(a) $\sum_n a_n z^n$ DV $\Longrightarrow |z| \geqslant R$.

(b) $\sum_n a_n z^n$ GRD $\Longrightarrow |z| \geqslant R$.

(c) $(a_n z^n)_n$ non bornée $\Longrightarrow |z| \geqslant R$.

(d) $\sum_n a_n z^n$ non AC $\Longrightarrow |z| \geqslant R$.

(e) $\sum_n a_n z^n$ non GRD $\Longrightarrow |z| \leqslant R$.

(f) $\sum_n a_n z^n$ AC $\Longrightarrow |z| \leqslant R$.

(g) $\sum_n a_n z^n$ CV $\Longrightarrow |z| \leqslant R$.

(h) $(a_n z^n)_n$ bornée $\Longrightarrow |z| \leqslant R$.

6. **Comparaison de RdC** Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de RdC respectifs R_a et R_b.
   (a) Si $a_n = O(b_n)$ quand $n \to +\infty$ alors $R_a \geqslant R_b$.
   (b) Si $a_n \sim b_n$ quand $n \to +\infty$ alors $R_a = R_b$.
   (dem)
7. **Somme et produit de séries entières** Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de RdC respectifs R_a et R_b.
   — La somme de ces deux séries entières est $\sum_n c_n z^n$ telle que :
     (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = a_n + b_n$,
     (b) Si $R_a \neq R_b$, alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. Sinon $R_c \geqslant R_a = R_b$. (dem)
   — Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est $\sum_n d_n z^n$ telle que :
     (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,
     (b) $R_d \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. (dem)
   — On a, pour tout complexe z tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ (dem) :
     (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$
     (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$
8. **Dérivée et primitive d'une série entière** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière.
   (a) La dérivée de cette série entière est $\sum_{n\geqslant 1} a_n n z^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} a_{n+1}(n+1) z^n$.
   (b) Les primitives de cette série entière sont les séries entières de la forme $\lambda + \sum_n a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (c) Dériver ou primitiver une série entière ne change pas son RdC (dem).

II. Séries entières d'une variable complexe

1. **Théorème** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de RdC R. On pose : $\forall z \in D(O, R),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
   Alors : f est continue.
2. **Exemples**
   (a) $\exp : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.
   (b) $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ est continue sur $D(0,1)$.

III. Séries entières d'une variable réelle

1. **Théorème** (dem) Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de RdC $R \in [0, +\infty]$.
   Cette série de fonctions converge normalement sur tout segment de l'intervalle $]-R, R[$ (« intervalle ouvert de convergence »).
   En particulier elle converge uniformément sur tout segment de $]-R; R[$.
2. **Théorème** (dem) Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de RdC $R \in [0, +\infty]$. On note S sa somme sur $]-R, R[$.
   (a) S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on peut « dériver terme à terme $S(x)$ » : $\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}$.
   (b) Plus généralement : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.
3. **Primitive d'une série entière d'une variable réelle** Pour tout $x \in]-R, R[$, les primitives de $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle

1. **Fonction DSE** Soit $r \in]0, +\infty]$. Soit $f \in]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que **f est développable en série entière** sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière telle que :
$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
2. Remarques
   (a) Le RdC R de $\sum_n a_n x^n$ est au moins égal à r, càd : $R \geqslant r$.
   (b) Une fonction est DSE implique : elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (c) On dit que f est DSE en 0 s'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f soit DSE sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.
   (d) Le DSE de f est la série entière $\sum_n a_n x^n$.
   (e) Le produit de deux fonctions DSE est DSE.
   (f) La somme de deux fonctions DSE est DSE.
3. **Unicité** Soit $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction DSE sur $]-r, r[$. La DSE de f est unique. (dem)
4. **Développement limité** Soit $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$.
   — On suppose : f est DSE sur $]-r, r[$ et on note $\sum_n a_n x^n$ le DSE de f.
   — Alors : f admet un DL à tous les ordres N en 0, obtenus en « tronquant » le DSE de f.
   Pour tout entier N, quand $x \to 0$:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \left| \begin{array}{l} o\left(x^N\right) \\ O\left(x^{N+1}\right) \end{array} \right.$$
5. **Développements en séries entières des fonctions usuelles**
   (a) De exp on déduit ch (partie paire), sh (partie impaire), cos (DSE de ch avec signes alternés) et sin (DSE de sh avec signes alternés).
   (b) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad$ et $\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.
   (c) En primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ on obtient : $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(d) En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ on obtient : $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

(e) En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient : $\text{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(f) $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ en posant $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. (admis)

V. Application des séries entières à la recherche de solutions particulières d'équations différentielles linéaires : cf. exemple dans le cahier

1. On note $\displaystyle\sum_n a_n x^n$ une série entière de RdC non nul et on note y sa somme.
2. On remplace y, y' et y'' dans l'équation et on factorise par x^n en utilisant des changements d'indices.
3. On en déduit une relation de récurrence pour (a_n) et on exprime pour tout a_n en fonction de n.
4. On en déduit y.

Chapitre 8 : Intégrales généralisées

I. Fonctions continues par morceaux

1. **Fonction continue par morceaux** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Soient a, b tels que $a < b$.
   (a) On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ se prolonge par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.
   (b) On dit que f est continue par morceaux sur I si pour tout segment J de I, $f_{|J}$ est continue par morceaux.
2. **Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment** Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{K})$. Soit $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ admet un prolongement continu $g_k : [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{K}$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(t)\mathrm{d}t.$$
3. **Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment** Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{K})$.
   (a) **Linéarité**
   (b) **Positivité :** $f \geqslant 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
   (c) **Croissance :** $f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
   (d) **Inégalité de la moyenne :** $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$.
   (e) **Sommes de Riemann :**
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$
4. Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

II. Intégrales convergentes

1) Définition

1. **Intégrale généralisée** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in]a, +\infty]$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a, b[, \mathbb{K})$.
   (a) On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ **converge** si $\displaystyle\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie.
   (b) Cette intégrale est appelée **intégrale généralisée** ou **intégrale impropre**.
   (c) Si elle converge, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
2. **Généralisation** Si $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, on considère $c \in]a, b[$.
   (a) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge $\iff \displaystyle\lim_{x\to a} \int_x^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t$ existent et sont finies.
   (b) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{y\to b} \int_c^y f(t)\mathrm{d}t$.
3. **Exemples de référence**
   (a) **Fonction exponentielle**
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha > 0 \quad \text{et dans ce cas : } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$
   (b) **Intégrales de Riemann**

— De 0 à 1 :
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha < 1 \quad \text{et dans ce cas : } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$
— De 1 à $+\infty$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \alpha > 1 \quad \text{et dans ce cas : } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

(c) **Fonction logarithme**
$$\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument et } \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1.$$

4. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b],\mathbb{K})$. Alors $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f = \int_{]a,b[} f$.
5. **Prolongement par continuité et convergence**
   (a) Si $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{K})$ et f se prolonge par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Si $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b],\mathbb{K})$ et f se prolonge par continuité en a, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
   (c) Si $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b[,\mathbb{K})$ et f se prolonge par continuité en a et en b, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2) Propriétés

1. **Linéarité**
2. **Positivité**
3. **Croissance**
4. **Relation de Chasles** Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$. Soient $a,b,c \in \overline{I}$. Alors :
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{si 2 de ces 3 intégrales au moins sont convergentes.}$$
5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ **continue**, où $I = [a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $a < b$. Alors : $\begin{cases} f \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Longrightarrow f = 0.$

3) Changement de variable

Théorème : Changement de variable
Soient $a,b,\alpha,\beta \in [-\infty,+\infty]$ tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$.
Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha,\beta[$ vers $]a,b[$.
Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b[,\mathbb{K})$.
— Alors :
1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature.
2. Si elles sont convergentes alors elles sont égales.

4) Intégration par parties

Théorème : Intégration par parties
Soient $a,b \in [-\infty,+\infty]$ tels que $a < b$.
Soient $f,g \in \mathcal{C}^1(]a,b[,\mathbb{K})$.
— On suppose : fg admet une limite finie en a et en b.
— Alors :
1. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
2. Si elles sont convergentes, alors : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t)}_{\left[fg\right]_a^b} - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$

III. Intégrales absolument convergentes

1. **Fonction intégrable** Soit $a, b \in [-\infty, +\infty]$ tels que $a < b$. Soit I un intervalle de bornes a et b. Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.
   (a) On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente**, ou que f est **intégrable** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (c) On a ainsi « AC $\Longrightarrow$ CV ».
2. **Lemme** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in]a, +\infty]$. Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a, b[, \mathbb{R})$.
   — On suppose : $f \geqslant 0$
   — Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ CV $\iff \varphi : \begin{array}{ccc} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est majorée.
   (dem)
3. **Théorème : Comparaison d'intégrales absolument convergentes** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in]a, +\infty]$. Soient $f, g \in \mathcal{C}_m^0([a, b[, \mathbb{K})$.
   — On suppose l'une des propositions suivantes :
   (a) Quand $t \to b$, $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$.
   (b) Quand $t \to b$, $f(t) = o(g(t))$.
   (c) Quand $t \to b$, $f(t) \sim g(t)$.
   (d) $\forall t \in [a, b[,\ |f(t)| \leqslant |g(t)|$.
   — Alors : g est intégrable sur $[a, b] \Longrightarrow f$ est intégrable sur $[a, b[$.
   (dem)
4. **Contraposée** Si, quand $t \to b$, $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$, alors f n'est pas intégrable sur $[a, b] \Longrightarrow g$ n'est pas intégrable sur $[a, b[$.

IV. Premiers théorèmes

1. **Théorème : Comparaison série-intégrale** Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([0, +\infty], \mathbb{R})$.
   — On suppose : f est décroissante et positive.
   — Alors :
   $$\sum_n f(n) \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$
   (dem : utiliser l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n, n+1],\ f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1)$.)
2. **Théorème de convergence dominée**
   Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
   Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
   Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
   — On suppose :
   (a) $f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} f$.
   (b) l'hypothèse de domination : $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$, $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t), \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I. \end{cases}$
   — Alors :
   (a) Les fonctions f et f_n sont intégrables sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

3. **Théorème : intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions**
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Soit $S \in \mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{K})$.
— On suppose :
   (a) $\displaystyle\sum_n f_n \xrightarrow[I]{\text{CS}} S$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est intégrable sur I.
   (c) La série $\displaystyle\sum_n \int_I |f_n|$ converge.
— Alors :
   (a) S est intégrable sur I.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S$.

V. Intégrales à paramètres

1) Continuité sous le signe $\displaystyle\int$

1. **Théorème : continuité sous le signe $\displaystyle\int$**
Soient I (de bornes a et b) et A deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit une fonction f : $\begin{array}{ccc} A\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$
— On suppose :
   (a) f est continue par rapport à x.
   (b) f est continue par morceaux par rapport à t.
   (c) l'hypothèse de domination : $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{R}_+)$, $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t), \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I. \end{array}\right.$
— Alors :
$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est contine.}$$
2. **CNS** g est continue $\iff \forall S$ segment de A, $g_{|S}$ est continue.
3. **Variante du théorème avec hypothèse de domination sur tout segment** Mêmes notations.
— On suppose :
   (a) f est continue par rapport à x.
   (b) f est continue par morceaux par rapport à t.
   (c) l'hypothèse de domination sur tout segment S de A : $\exists\, \varphi_S \in \mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{R}_+)$, $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in S,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_S(t), \\ \varphi_S \text{ est intégrable sur } I \end{array}\right.$
— Alors :
$$g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est contine.}$$

2) Dérivation sous le signe $\int$

1. **Théorème : dérivation sous le signe $\int$**
   Soient I (de bornes a et b) et A deux intervalles de $\mathbb{R}$.
   Soit une fonction $f : \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$
   — On suppose :
   (a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x.
   (b) f est continue par morceaux et intégrable par rapport à t.
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par morceaux par rapport à t.
   (d) l'hypothèse de domination : $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{R}_+)$, $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t), \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I. \end{array}\right.$
   — Alors :
   (a) $g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) Formule de Leibniz : $\forall x \in A,\ g'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$
   — Ainsi :
   (c) $\forall x \in A,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$
2. Il existe de même une **variante du théorème avec hypothèse de domination sur tout segment (de A)**.
3. **Théorème : extension aux classes $\mathcal{C}^k$** Mêmes notations. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   — On suppose :
   (a) f est de classe $\mathcal{C}^k$ par rapport à x.
   (b) $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ est continue par morceaux et intégrable par rapport à t.
   (c) $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est continue par morceaux par rapport à t.
   (d) l'hypothèse de domination : $\exists\, \varphi \in \mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{R}_+)$, $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t), \\ \varphi \text{ est intégrable sur } I. \end{array}\right.$
   — Alors :
   (a) $g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
   (b) Formule de Leibniz : $\forall x \in A,\ g^{(k)}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$
   — Ainsi :
   (c) $\forall x \in A,\ \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t.$
4. Il existe de même une **variante du théorème avec hypothèse de domination sur tout segment (de A)**.

VI. Normes 1 et 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 points.
Soit L_1 l'ensemble des fonctions continues, intégrables, de I dans $\mathbb{K}$.
Soit L_2 l'ensemble des fonctions continues, de carré intégrable, de I dans $\mathbb{K}$.
Alors :

1. L_1 est un $\mathbb{K}$-ev et $f \longmapsto \int_I |f|$ est une norme sur L_1.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, L_2 est un $\mathbb{R}$-ev et $(f, g) \longmapsto \int_I fg$ est un produit scalaire sur L_2.
3. Si $\mathbb{K}$ est quelconque, L_2 est un $\mathbb{K}$-ev et $(f, g) \longmapsto \sqrt{\int_I |fg|}$ est une norme sur L_2.

Chapitre 9 : Équations différentielles

I. Équations linéaires du premier ordre

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On considère :

$$(E) : y' + a(t)y = b(t)$$

   (a) On considère l'équation homogène associée : $(E_0) : y' + a(t)y = 0$.
   (b) Résoudre (E), c'est déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telles que : $\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.
   (c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est solution de (E_0) et y_1 est une solution particulière de (E).
2. **Résolution de l'équation homogène** Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $y_0 : t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et λ est un réel.
3. **Recherche d'une solution particulière** Deux possibilités
   (a) La solution particulière est évidente
   (b) On utilise la méthode de **variation de la constante** : On pose $y_1 : t \longmapsto \lambda(t)\, \mathrm{e}^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On remplace y_1 dans l'équation et on trouve une CNS pour avoir l'expression de λ et ainsi trouver y_1.

II. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère :

$$(E) : ay'' + by' + cy = P(t)e^{\gamma t}$$

2. **Résolution de l'équation homogène dans le cas réel** On associe à (E_0) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant Δ et de solutions r_1 et r_2.
   (a) $\Delta < 0$ et $r_{1/2} = -\lambda \pm i\omega \Longrightarrow y_0 : t \longmapsto [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\, \mathrm{e}^{-\lambda t},$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
   (b) $\Delta = 0 \Longrightarrow y_0 : t \longmapsto (At + B)\, \mathrm{e}^{rt},$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
   (c) $\Delta > 0 \Longrightarrow y_0 : t \longmapsto A\, \mathrm{e}^{r_1 t} + B\, \mathrm{e}^{r_2 t},$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
3. **Résolution de l'équation homogène dans le cas complexe**
   (a) $\Delta = 0 \Longrightarrow y_0 : t \longmapsto (At + B)\, \mathrm{e}^{rt},$ où $A, B \in \mathbb{C}$.
   (b) $\Delta \neq 0 \Longrightarrow y_0 : t \longmapsto A\, \mathrm{e}^{r_1 t} + B\, \mathrm{e}^{r_2 t},$ où $A, B \in \mathbb{C}$.
4. **Recherche d'une solution particulière** On recherche une solution particulière de la forme $y_1 : t \longmapsto Q(t)e^{\gamma t}$ avec :
   (a) $Q \in \mathbb{C}[X]$.
   (b) $\deg Q = \begin{cases} \deg P \text{ si } \gamma \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique.} \\ \deg P + 1 \text{ si } \gamma \text{ est l'une des deux solutions de l'équation caractéristique.} \\ \deg P + 2 \text{ si } \gamma \text{ est l'unique solution de l'équation caractéristique.} \end{cases}$

III. Systèmes différentiels linéaires

1. **Système linéaire d'ordre 1** $(S) : \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + \dots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$

   (a) Les a_{ij} et les b_j sont des fonctions fixées de I dans $\mathbb{K}$.
   (b) $y_1, ..., y_n$ sont les inconnues de (S).
2. **Écriture matricielle** $(S) : Y' = AY + B$
   (a) $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$
   (b) $B \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$
   (c) $A \in \mathcal{F}(I, \mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$.
3. **Système homogène** (S) est homogène $\iff B = 0_{n1}$. On associe à (S) le système homogène $(S_0) : Y' = AY$.
4. **Forme de $\boldsymbol{Y}$, solution de $\boldsymbol{(S)}$** Soit Y_1 une solution particulière de (S). Les solution de (S) sont les fonctions de la forme $Y : t \longmapsto Y_0(t) + Y_1(t)$ où Y_0 est solution de (S_0) (dem).
5. **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire** Soit $t_0 \in I$ et $V_0 \in \mathbb{K}^n$.
   — On suppose
      (a) I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
      (b) $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$.
      (c) $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.
   — Alors il existe une unique solution $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (S) : Y' = AY + B \\ (\mathrm{CI}) : Y(t_0) = V_0 \end{cases}$$

   (dem hp)
6. **Corollaire** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathrm{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (S) et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de (S_0). Soit $t_0 \in I$. On a :
   (a) L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y & \longmapsto & Y(t_0) \end{array}$ est une bijection.
   (b) L'application $\Phi_0 : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ Y_0 & \longmapsto & Y_0(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme. En particulier, $\mathscr{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

   (dem)
7. **Méthode de résolution**
   (a) Étape 1 : Trigonaliser A. On a : $A = PTP^{-1}$.
   (b) Étape 2 : Soit $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. On a :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (S) &\iff \forall t \in I,\ X'(t) = PTP^{-1}X(t) + B(t) \\ &\iff \forall t \in I,\ P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t) \\ &\iff \forall t \in I,\ Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t) \text{ en posant } Y = P^{-1}X \\ &\iff \text{on obtient } Y \text{ en résolvant les équations du système une par une} \\ &\iff \text{on obtient } X(t) = PY(t) \end{aligned}$$

   (c) Si $B = 0$, il est inutile de calculer P^{-1}.
   (d) La méthode s'applique aussi si A dépend de t, à condition que l'on puisse écrire $A(t) = PT(t)P^{-1}$.

IV. Équations différentielles scalaires

1. Soient $a, b, c, d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On considère :

$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$

2. **Méthode d'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle** Soit $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. On suppose que a ne s'annule jamais.

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in I,\ a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t) \\
&\iff \forall t \in I,\ \begin{cases} y'(t) = y'(t) \\ y''(t) = -\dfrac{b(t)}{a(t)}y'(t) - \dfrac{c(t)}{a(t)}y(t) + \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{cases} \\
&\iff ,\ Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \text{ en posant } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{a} & \frac{-b}{a} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On sait résoudre (E) à condition $\begin{cases} \text{de pouvoir écrire } A(t) = PT(t)P^{-1} \\ \text{de pouvoir primitiver les fonctions qui apparaissent} \end{cases}$

3. **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire** Soit $t_0 \in I$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On rappelle que I un intervalle, a, b, c, d sont continues et a ne s'annule jamais. Alors il existe une unique solution $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ au probème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) : Y' = AY + B \\ (\text{CI}) : y(t_0) = \alpha \text{ et } y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

V. Méthode de la variation de la constante

1. On considère toujours
$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$
On suppose que y_0 est une solution de (E_0) qui ne s'annule jamais (ex : DSE ou si a, b, c constants).

2. **Méthode de la variation de la constante** Soit $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. On pose $\lambda = \dfrac{y}{y_0}$, de sorte que λ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $y = \lambda y_0$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in I,\ a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t) \\
&\iff a\lambda'' y_0 + 2a\lambda' y_0' + \underline{a\lambda y_0''} + b\lambda' y_0 + \underline{b\lambda y_0'} + b\lambda y_0' + \underline{c\lambda y_0} = d \\
&\iff \lambda' \text{ est solution de } (E') : ay_0 z' + (2ay_0' + by_0)z = d \text{ car } y_0 \text{ est solution de } (E_0)
\end{aligned}$$

3. Cette méthode est utile pour :
   (a) trouver toutes les solution de (E) ou (E_0), connaissant une solution particulière de (E_0) qui ne s'annule jamais.
   (b) trouver une solution particulière de (E), connaissant toutes les solutions de (E_0).

Chapitre 10 : Fonctions de plusieurs variables réelles

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

I. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1) Fonctions différentiables

1. **Fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point** Soient $f, g \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. Soit $a \in U$.
   (a) On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a si :
   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbb{R}_+^*,\ \|x-a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leqslant \varepsilon \|g(x)\|.$$
   (b) On note : quand $x \to a$, $f(x) = o(g(x))$.
   (c) Dans le cas où $\forall x \in U \setminus \{a\},\ g(x) \neq 0$, cela signifie :
   $$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(a) = 0 \end{cases}$$
2. **Fonction différentiable** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$.
   (a) On dit que f est différentiable en a s'il existe une forme linéaire $\ell \in (\mathbb{R}^p)^*$ telle que quand $h \in \mathbb{R}^p$ tend vers 0 :
   $$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o\big(\|h\|\big)$$
   ($a + h \in U$ si h est petit)
   (b) ℓ est unique et est alors appelée la **différentielle de f en a**, notée $\mathrm{d}f(a)$. On note ainsi $\ell(h) = \mathrm{d}f(a) \cdot h$.
3. **Analogie** Le caractère différentiable pour les fonctions sur U correspond au caractère dérivable des fonctions sur $\mathbb{R}$.

2) Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

1. **Dérivée partielle** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, ..., a_p) \in U$.
   (a) On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa k-ième variable si la fonction $x_k \longmapsto f(a_1, ..., x_k, ..., a_p)$ est dérivable en a_k.
   (b) Sa dérivée est en a par rapport à x_k est alors notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ ou $\partial_k f$.
2. On dit que **f est de classe $\mathcal{C}^1$** si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

3) Propriétés et théorèmes

1. **Premières propriétés**
   (a) $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.
   (b) $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est stable par le produit.
   (c) Si $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, alors $V = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$.
2. **Théorème** $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \Longrightarrow f$ est différentiable en tout point a de U, et quand $h = (h_1, ..., h_p) \to (0, ..., 0)$:
   $$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \cdot h_p + o\big(\|h\|\big)$$
   La différentielle de f en a est $\mathrm{d}f(a) : \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$
   (admis)

3. **Gradient** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in U$.
   (a) On appelle gradient de f en a le vecteur : $\nabla f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$.
   (b) $\forall h \in \mathbb{R}^p,\ \mathrm{d}f(a)\, h = \langle \nabla f(a) | h \rangle$.
4. **Théorème : règle de la chaîne** Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g = (g_1, ..., g_p) \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$.
   — On suppose : $\forall v \in V,\ g(v) = (g_1(v), ..., g_p(v)) \in U$.
   — Alors :
   (a) $\varphi : v \longmapsto f(g_1(v), ..., g_p(v)) = (f \circ g)(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
   (b) $\forall k \in [\![1, m]\!],\ \forall v \in V,\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_k} = \dfrac{\partial g}{\partial v_k}(v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(v)) + ... + \dfrac{\partial g}{\partial v_k}(v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(g(v))$.

   (admis)
5. **Théorème : caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe** Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.
   — On suppose :
   (a) U est convexe, càd : $\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in U$.
   (b) $\forall x \in U,\ \mathrm{d}f(x) = 0$.
   — Alors : f est constante sur U.

4) Étude des extrema d'une fonction

1. **Extremum (maximum ou minimum) global, local** Soit $A \subset \mathbb{R}^p$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in A$. On dit que f admet un :
   (a) maximum global en a si pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant f(a)$. On note : $\max\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$.
   (b) minimum global en a si pour tout $x \in A$, $f(x) \geqslant f(a)$. On note : $\min\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$.
   (c) maximum local en a si : $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in B(a, \delta),\ f(x) \leqslant f(a)$.
   (d) minimum local en a si : $\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in B(a, \delta),\ f(x) \geqslant f(a)$.
2. **Théorème** Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit $a \in U$. f admet un maximum local en $a \Longrightarrow \nabla f(a) = (0, ..., 0)$ (càd $\mathrm{d}f(a) = 0$).
3. **Point critique** Un point $a \in U$ tel que $\nabla f(a) = 0$ est appelé point critique (ou point singulier) de f.
4. **Application** Soit $A \in \mathbb{R}^p$ un fermé borné non vide. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
   — On suppose :
   (a) f est continue sur A.
   (b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{A}$.
   — Alors :
   (a) f est bornée et atteint ses bornes sur A, car f est continue sur un fermé borné de dimension finie.
   (b) Si f admet un extremum local en a, alors a est $\left|\begin{array}{l}\text{un point critique de } f|_{\mathring{A}} \\ \text{un point de la frontière } \partial A\end{array}\right.$
5. **Méthode de recherche d'extrema d'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$**

$\boxed{\text{Analyse}}$ Soit $x = (x_1, ..., x_p) \in A$. On suppose que $x \in \mathring{A}$ et que f admet un extremum local en x. On a alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(x) = 0$. On obtient ainsi les points critiques de $f|_{\mathring{A}}$.

$\boxed{\text{Synthèse}}$ On regarde en lesquels de ces points f admet un extremum. Il faut de plus étudier la frontière.

5) Lignes de niveaux

Soit $f : A \longrightarrow$ où $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle **ligne de niveau** de f un ensemble de points où f prend une valeur fixée $\lambda \in \mathbb{R}$: $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) = \lambda\}$.

II. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

1. **Fonction de classe $\mathcal{C}^2$** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
   (a) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si $\forall j, k \in [\![1, p]\!]$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ existent et sont continues.
   (b) On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ ssi toutes ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. **Théorème de Schwarz** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. Soient $j, k \in [\![1, p]\!]$.
   — On suppose : toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ existent au voisinage de a et sont continues en a.
   — Alors :
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$
3. **Corollaire** f est de classe $\mathcal{C}^2 \Longrightarrow \forall j, k \in [\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$.
4. **Équations aux dérivées partielles**
   (a) Voir le cahier pour des exemples.
   (b) Changement de variable courant : les coordonnées polaires.
5. **Coordonnées polaires** Soit M de coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. On a :
   (a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (b) $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right) \pmod{2\pi}$
   (c) $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\}) \quad \Longrightarrow \quad \theta \equiv 2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \pmod{2\pi}$

III. Géométrie différentielle élémentaire

1. **Courbes du plans** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{C}$.
   (a) On dit que M_0 est un point régulier de $\mathscr{C}$ si $\nabla f(M_0) \neq (0, 0)$.
   (b) La tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 est alors la droite affine passant par M_0 de vecteur normal $\nabla f(M_0)$. On la note $\mathrm{T}_{M_0}\mathscr{C}$.
   (c) On obtient ainsi l'équation cartésienne de cette tangente :
$$\begin{aligned} M \in \mathrm{T}_{M_0}\mathscr{C} &\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{\nabla} f(M_0) \\ &\iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{\nabla} f(M_0) = 0 \\ &\iff (E_T) : (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$
2. **Surface de $\mathbb{R}^3$** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On note $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$.
   (a) On dit que M_0 est un point régulier de $\mathscr{S}$ si $\nabla f(M_0) \neq (0, 0, 0)$.
   (b) Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0 est alors le plan affine passant par M_0 de vecteur normal $\nabla f(M_0)$. On le note $\mathrm{T}_{M_0}\mathscr{S}$.
   (c) On obtient ainsi l'équation cartésienne de ce plan tangent :
$$\begin{aligned} M \in \mathrm{T}_{M_0}\mathscr{S} &\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{\nabla} f(M_0) \\ &\iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{\nabla} f(M_0) = 0 \\ &\iff (E_S) : (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{aligned}$$

CHAPITRE 11 : COURBES PARAMÉTRÉES

I. Courbe paramétrée

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère une fonction $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$

1. On dit que f est une **courbe paramétrée** (plane).
2. L'image de f : $\mathrm{Im}(f)$ est appelé le **support de la courbe paramétrée** f. On note $\mathrm{Im} f = \Gamma$.
3. On dit que Γ admet le paramétrage :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

   (notation abusive)

II. Point régulier, point singulier

1. **Point régulier, point singulier** Soit $t_0 \in I$.
   (a) On dit que f admet un point régulier en t_0 si $f'(t_0) \neq (0,0)$, c'est-à-dire si $x'(t_0) \neq 0$ ou $y'(t_0) \neq 0$.
   (b) Si $f'(t_0) = (0,0)$, alors on dit que f admet un point singulier en t_0.
2. **Tangente en un point régulier** Si f admet en t_0 un point régulier, alors Γ admet en $f(t_0)$ une tangente qui est la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f'(t_0)$.
3. **Cas général**
   — On suppose
      (a) $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
      (b) $f'(t_0) = f''(t_0) = ... = f^{(k-1)}(t_0) = (0,0)$.
      (c) $f^{(k)}(t_0) \neq (0,0)$.
   — Alors : Γ admet en $f(t_0)$ une tangente qui est la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $f^{(k)}(t_0)$.

III. Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1. **Réduction de l'intervalle d'étude** grâce aux symétries de f avec notamment :
   — la périodicité ;
   — la parité.
2. **Tableau de variation** de x et y.
3. **Étude de quelques points particuliers** et de leur tangente. Typiquement :
   — les points réguliers ;
   — les points où la tangente est verticale ;
   — les points où la tangente est horizontale.
4. **Étude des branches infinies** (éventuelles asymptotes).

Troisième partie

PROBABILITÉS

CHAPITRE 12 : PROBABILITÉS

I. Rappels et compléments sur les ensembles

1) Ensembles finis

1. **Définition**
   (a) Un ensemble E est dit **fini** s'il contient un nombre fini d'éléments.
   (b) Le nombre d'éléments de E est appelé **cardinal** et est noté card$E$, $|E|$, ou $\#E$.
2. **Théorème** Soit E un ensemble fini et A une partie de E.
   (a) Alors A est un ensemble fini et $\#A \leqslant \#E$.
   (b) $\#A = \#E \iff A = E$.
3. **Théorème** Soient E et F deux ensembles finis tels que $\#E = \#F$. Soit $f : E \longrightarrow F$. Alors :

$$f \text{ est une bijection} \iff f \text{ est une surjection} \iff f \text{ est une injection}$$

2) Dénombrement

1. On note $\mathscr{P}(E)$ **l'ensemble des parties de E**. $A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.
   (a) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$. Si A et B sont disjoints : $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
   (b) $\#(E \backslash A) = \#E - \#A$.
   (c) $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.
   (d) $\#(B^A) = \#\mathscr{F}(A, B) = \#B^{\#A}$.
   (e) $\#\mathscr{P}(E) = \#\mathscr{F}(E, \{0,1\}) = 2^{\#E}$.
3. **Arrangement, combinaison** Soit E tel que $\#E = n$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On appelle :
   (a) p-arrangement de E tout p-uplet (ou p-liste) ordonné d'éléments distincts 2 à 2 : $(x_1, ..., x_p) \in E^p$.
   (b) p-combinaison de E toute partie (donc ensemble) de E contenant p éléments : $\{x_1, ..., x_p\} \in \mathscr{P}(E)$.
   (c) Le nombre de p-arrangements de E est $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
   (d) Le nombre de p-combinaisons de E (ensemble des parties à p éléments) est $\mathrm{C}_n^p = \dbinom{n}{p} = \#\mathscr{P}_p(E) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
   (e) A_n^p est aussi le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal p vers E. Si $p = n$, alors le nombre bijections de E vers E est $\#\mathfrak{S}_E = \mathrm{A}_n^n = n!$.

3) Ensembles dénombrables

1. Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
   (a) Plus concrètement un ensemble dénombrable est un ensemble qui s'écrit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où les x_n sont 2 à 2 distincts.
   (b) Si $E = \{x_n\}_n$ avec les x_n quelconques, E est fini ou dénombrable ; il est dit **au plus dénombrable**.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc. sont dénombrables.
3. Si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ aussi.
4. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$, $]0,1[$ sont indénombrables (et de même taille).

II. Espaces probabilisés

1) Définition, cadre formel

1. **Univers, tribu, événements** Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$ telle que :
   (a) $\Omega \in \mathcal{A}$.
   (b) $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$.
   (c) $\forall (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

   Ω est appelé l'univers ; $\mathcal{A}$ est appelée la tribu des événements.
2. **Événements particuliers**
   (a) Ω est appelé l'**événement certain**.
   (b) $\varnothing$ est appelé l'**événement impossible**.
   (c) Un événement singleton est appelé un **événement élémentaire**.
3. **Événements incompatibles** Deux événements sont incompatibles si leur intersection est vide.
4. **Stabilité de $\mathcal{A}$** Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors $\mathcal{A}$ est (dem) :
   (a) stable par réunion finie ;
   (b) stable par intersection finie ou dénombrable ;
   (c) stable par différence ensembliste : $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A\backslash B \in \mathcal{A}$.
5. **Système complet d'événements** Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. On appelle :
   (a) Système complet *fini* d'événements toute famille *finie* $(A_n)_{n\in[1,N]} \in \mathcal{A}^N$ d'événements 2 à 2 incompatibles tels que :
   $$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \Omega$$
   (b) Système complet *dénombrable* d'événements toute famille *dénombrable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^N$ d'événements 2 à 2 incompatibles tels que :
   $$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$$
6. **Probabilité** Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ telle que :
   (a) $P(\Omega) = 1$.
   (b) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles, $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
7. $P(\varnothing) = 0$.
8. $\forall (A_n)_{n\in[1,N]} \in \mathcal{A}^N$ suite finie d'événements 2 à 2 incompatibles, $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} P(A_n)$.
9. Soient Ω un univers, $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(a) On appelle le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **espace probabilisé**.

(b) Un événement A tel que $P(A) = 1$ est dit **presque certain** (ou presque sûr).

(c) Un événement A tel que $P(A) = 0$ est dit **presque impossible** (ou négligeable).

10. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements.

(a) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$ et on a : $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

(b) On a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(c) On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(dem)

2) Propriétés

1. **Continuité croissante** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (càd $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$) alors (dem) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

2. **Continuité décroissante** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (càd $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$), alors (dem) :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

3. **Sous-additivité**

(a) Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

(b) Cas de l'égalité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \iff \forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$.

(c) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements presque impossibles, alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

(d) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements presque certains, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

3) Exemples

1. **Probabilité uniforme sur un ensemble fini**

(a) On suppose que Ω est fini et non vide.

(b) On considère $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(c) On pose $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$

Dans ce cas, tous les événements élémentaires sont **équiprobables**.

2. **Cas où $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$** Les probabilités P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ sont les fonctions de la forme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_n p_n \end{array}$$

où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est une suite telle que la série $\sum_n p_n$ est convergente et de somme 1.

III. Conditionnement, indépendance

1) Définitions

On considère l'espace probabilisé : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. **Probabilité conditionnelle** Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$. On suppose $P(B) \neq 0$.
   (a) La probabilité conditionnelle de A sachant B est : $P_B(A) = P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
   (b) En effet en faisant un arbre on remarque que $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$. Alors l'application $P_B : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2) Propriétés

1. **Probabilités composées** Soient $A_1, ..., A_N$ des événements. On suppose $P(A_1 \cap ... \cap A_{N-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap ... \cap A_N) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1 \cap ... \cap A_{N-1}}(A_N)$$

2. **Probabilités totales**
   (a) Soit $(A_1, ..., A_N)$ un système complet fini d'événements. Soit B un événement. Alors :

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B \cap A_n) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n)$$

   (b) Idem pour un système complet dénombrable d'événements (somme infinie).
   (c) Ces formules sont également valables pour une suite d'événements 2 à 2 incompatibles telle que la somme des probabilités de ses événements vaut 1.
3. **Formule de Bayes**
   (a) Si A et B sont 2 événements de probabilité non nulle, alors : $P(A \mid B) = \dfrac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})}$.
   (b) Soit $(A_1, ..., A_N)$ un système complet fini d'événements de probabilité non nulle. Soit B un événement de probabilité non nulle. Alors :

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

   (c) Idem pour un système complet dénombrable d'événements (somme infinie).

3) Événements indépendants

1. Deux événements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. C'est à dire : $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$.
2. Soient $A_1, ..., A_N$ des événements.
   (a) Ces événements sont dits **2 à 2 indépendants** si : $\forall i, j \in [\![1, N]\!],\ i \neq j \Rightarrow\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.
   (b) Ces événements sont dits **mutuellement indépendants** si : $\forall J \subset [\![1, N]\!],\ P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$.

IV. Variables aléatoires discrètes

1) Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. **Variable aléatoire (discrète)** On appelle variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow E$ (où E est un ensemble) telle que :
$$\begin{cases} \text{L'ensemble } \mathrm{Im}(X) \text{ est fini ou dénombrable} \\ \forall F \subset E,\ X^{-1}(F) \in \mathcal{A} \end{cases}$$
   (a) Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est un variable aléatoire réelle.
   (b) Les v.a. discrètes sont les seules v.a. au programme.
2. **CNS** (dem) X est une variable aléatoire $\iff \begin{cases} \text{L'ensemble } \mathrm{Im}(X) \text{ est fini ou dénombrable} \\ \forall x \in E,\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A} \end{cases}$
3. **Notation** On note $X^{-1}(F) = (X \in F) = \{X \in F\}$. C'est un événement.
4. **Loi d'une variable aléatoire** Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une v.a. On appelle loi de X l'application :
$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0,1] \\ F & \longmapsto & P(\{X \in F\}) \end{array}.$$
   On note plus simplement $P_X(F)$ ou $P(X \in F)$ la probabilité $P(\{X \in F\})$ que X appartienne à F.
5. Le triplet $(E, \mathcal{P}(E), P_X)$ est un espace probabilisé.
6. **Proposition** Soit X une v.a. d'image dénombrable $\mathrm{Im}(X) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où les x_n sont 2 à 2 distincts. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = x_n) = p_n$.

2) Exemples de lois de probabilité

Soit X une v.a.

1. **Loi uniforme sur un ensemble fini** Soit E un ensemble fini non vide. X suit une loi uniforme sur E si :
$$\forall A \subset E,\ P(X \in A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$
2. **Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$** $X : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :
$$\begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$
   On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
3. **Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$** $X : \Omega \longrightarrow [\![0,n]\!]$ suit une loi binomiale de paramètres n et p si :
$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
   Cela correspond à n répétitions d'une épreuve de Bernoulli.
   On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
4. **Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$** $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ suit une loi géométrique de paramètre p si :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$
   Cela correspond au premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli : $k-1$ échecs puis 1 succès.
   On note : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
5. **Caractérisation comme loi sans mémoire** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une v.a. On suppose que X n'admet aucun majorant presque sûr, càd : $\forall N \in \mathbb{N},\ P(X \leqslant N) \neq 1$.
   (a) X suit une loi sans mémoire si : $\forall n, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$.
   (b) On a : X suit une loi sans mémoire $\iff \exists p \in]0,1[,\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
6. **Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$** $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ si :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{\lambda^k}{e^{\lambda}\, k!}$$
   On l'appelle "loi des événements rares" (voir VII.).
   On note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

3) Couples de variables aléatoires

1. **Loi conjointe, lois marginales** Soient E et F deux ensembles. Soient $X : \Omega \longrightarrow F$ et $Y : \Omega \longrightarrow G$ deux v.a. On pose :

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

   (a) Z est une variable aléatoire (discrète). On note parfois $Z = (X, Y)$.

   (b) La loi de Z est la loi conjointe de X et Y.

   (c) Les lois de X et Y sont les lois marginales de Z.

2. **Probabilité conditionnelle** Soit $y \in F$ tel que $P(Y = y) \neq 0$.

   (a) On appelle loi conditionnelle de X sachant Y la loi de X pour la probabilité conditionnelle $P_{\{Y=y\}}$.

   (b) $\forall A \subset E,\ P(X \in A \mid Y = y) = \dfrac{P(X \in A \text{ et } Y = y)}{P(Y = y)}$

3. (a) Si on connait la loi de Z, on connait la loi de X et la loi de Y.

   (b) Si on connait la loi de Y et la loi de X sachant $Y = y$ pour tout $y \in F$ alors on connait la loi de Z.

4) Fonction de répartition d'une variable aléatoire

1. **Fonction de répartition** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une v.a. *réelle*. La fonction de répartition de X est :

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$$

2. **Propriétés** (dem)

   (a) Si $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y$, alors $F_X(y) - F_X(x) = P(X \in]x, y])$.

   (b) La fonction F_X est croissante.

   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

5) Propriétés des variables aléatoires

1. **Composée d'une v.a.** Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $f : E \longrightarrow F$ une fonction quelconque. Alors $f \circ X$ est une v.a., notée abusivement $f(X)$.

2. **Propriétés**

   (a) La valeur absolue d'une v.a. réelle est une v.a. réelle.

   (b) La somme de v.a. réelles est une v.a. réelle.

   (c) Un produit de v.a. réelles est une v.a. réelle.

6) Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

1. **Fonction génératrice** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une v.a. *à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

   (a) La série génératrice de X est la série entière : $\sum\limits_{n} P(X = n) t^n$.

   (b) Le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.

   (c) Cette série converge en -1 et 1.

   (d) La somme de cette série entière sur $[-1, 1]$ est appelée fonction génératrice de X, notée G_X.

2. La fonction génératrice G_X caractérise la loi de la v.a. X.

V. Variables indépendantes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $X : \Omega \longrightarrow E$ et $Y : \Omega \to F$ deux v.a.

1. **Variables indépendantes** Les v.a. X et Y sont indépendantes si :
   $\forall x \in E,\ \forall y \in Y,\ P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.
2. **CNS** X et Y sont indépendantes $\iff \forall A \subset E,\ \forall B \in F,\ P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$. (dem h-p)
3. **Indépendance par composition** On suppose X et Y indépendantes. Soient $f : E \longrightarrow E'$ et $g : F \longrightarrow F'$ deux fonctions. Alors $f(X)$ et $g(X)$ sont indépendantes. (dem)
4. **Indépendance dans le cas d'une famille finie de variables aléatoires** Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.
   (a) $X_1, ..., X_n$ sont **2 à 2 indépendantes** si : $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow X_i$ et Y_j sont indépendantes.
   (b) $X_1, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si les conditions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :
      i. $\forall (x_1, ..., x_n),\ P(X_1 = x_1 \text{ et ... et } X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.
      ii. $\forall (A_1, ..., A_n),\ P(X_1 \in A_1 \text{ et ... et } X_n \in A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k)$.
5. **Indépendance dans le cas d'une suite de variables aléatoires** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.
   (a) Les v.a. X_n où $n \in \mathbb{N}$ sont **2 à 2 indépendantes** si : $\forall i \neq j,\ X_i$ et Y_j sont indépendantes.
   (b) Les v.a. X_n où $n \in \mathbb{N}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour toute partie $J \subset \mathbb{N}$, les variables X_j où $j \in J$ sont mutuellement indépendantes.
6. **Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes** On suppose X et Y indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors : $G_{X+Y} = G_X G_Y$. (dem)
7. **Exemples**
   (a) Si $X_1, ..., X_n$ sont des v.a. indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + ... + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
   (b) Si X et Y sont deux v.a. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

VI. Espérance, variance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1) Espérance

1. **Espérance** Soit $F = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de réels, où les réels x_n sont 2 à 2 distincts. Soit $X : \Omega \longrightarrow F$.
   (a) On dit que X admet une espérance si la série $\sum_n P(X = x_n)x_n$ est absolument convergente.
   (b) Dans ce cas on appelle espérance de X la somme de cette série :
   $$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)x_n.$$
   (c) Si X est d'image finie, alors X admet une espérance.
   (d) Si X est bornée, alors X admet une espérance.
2. **Espérance et fonction génératrice** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On remarque que $G_X(t) = E(t^X)$
   (a) X admet une espérance $\iff G_X$ est dérivable en 1.
   (b) Dans ce cas, $E(X) = G_X'(1)$.
   (dem non exigible)
3. **Propriétés** Soient X et Y deux v.a. réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que X et Y admettent une espérance.
   (a) L'espérance d'une constante est égale à cette constante : $E(a) = a$.

(b) **Linéarité :** $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
(c) **Positivité :** $X \geqslant 0 \Longrightarrow E(X) \geqslant 0$.
(d) **Croissance :** $X \leqslant Y \Longrightarrow E(X) \leqslant E(Y)$.

4. **Espérance d'un produit** Soient X et Y deux v.a. réelles *indépendantes*.
   (a) X et Y admettent une espérance, alors XY aussi.
   (b) Dans ce cas : $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   (dem h-p)
5. **Théorème du transfert pour une v.a. d'image finie** Soit X une v.a. d'image finie $\mathrm{Im}X = \{x_1, ..., x_N\}$ (où les x_n sont distincts 2 à 2). Soit $f : \mathrm{Im}X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors :
   (a) $f(X)$ admet une espérance.
   (b) $E\big[f(X)\big] = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} P(X = x_n)f(x_n)$.
6. **Théorème du transfert pour une v.a. d'image dénombrable** Soit X une v.a. d'image dénombrable $\mathrm{Im}X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (où les x_n sont distincts 2 à 2). Soit $f : \mathrm{Im}X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Alors :
   (a) $f(X)$ admet une espérance $\iff$ la série $\displaystyle\sum_n P(X = x_n)f(x_n)$ est absolument convergente.
   (b) $E\big[f(X)\big] = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = x_n)f(x_n)$.
   (dem hors programme)
7. **Une formule pour les v.a. à valeurs dans** $\mathbb{N}$ Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :
   (a) X admet une espérance $\iff$ la série $\displaystyle\sum_n P(X > n)$ est convergente.
   (b) $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

2) **Variance, écart-type, covariance**

1. **Lemme** Soit X une v.a. réelle telle que X^2 admet une espérance. Alors :
   (a) X admet une espérance.
   (b) $\forall m \in \mathbb{R},\ (X + m)^2$ admet une espérance.
   (dem)
2. **Variance, écart-type** Soit X une v.a. réelle telle que X^2 admet une espérance.
   (a) D'après le lemme précédent : $(X - E(X))^2$ admet une espérance.
   (b) On appelle variance de X le réel :
   $$V(X) = E\big([X - E(X)]^2\big) = E(X^2) - E(X)^2.$$
   (c) L'écart-type de X est la racine carrée de la variance de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
3. **Covariance, coefficient de corrélation** Soient X et Y deux v.a. réelles qui admettent une variance.
   (a) On appelle covariance de X et Y le réel :
   $$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\big([E - E(X)][Y - E(Y)]\big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$
   (b) On appelle coefficient de corrélation le réel : $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
4. **Indépendance et covariance** X et Y indépendants $\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
5. **Variance et fonction génératrice** Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) X admet une variance $\iff$ G_X est deux fois dérivable en 1.
   (b) Dans ce cas, $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$. (égalité à savoir retrouver)

6. **Variance de aX+b** Soit X une v.a. réelle admettant une variance. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :
   (a) $aX + b$ admet une variance.
   (b) $V(aX + b) = a^2 V(X)$. (dem)
7. **Variance d'une somme de variables aléatoires** Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a. réelles admettant une variance. Alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} V(X_j) + 2 \sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

3) Inégalités

1. **Inégalité de Markov** Soit X une v.a. réelle admettant une espérance. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors (dem) :

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}.$$

2. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Soit X une v.a. réelle admettant une variance. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors (dem) :

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

3. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** Soit X une v.a. réelle admettant une variance. Alors (dem) :

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

4) Compléments

1. **Moment d'une variable aléatoire** Soit X une v.a. réelle et $m \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On dit que X admet un moment d'ordre m si X^m admet une espérance.
   (b) X admet un moment d'ordre 1 $\iff$ X admet une espérance.
   (c) X admet un moment d'ordre 2 $\iff$ X admet une variance.
2. **Moment et fonction génératrice** X admet un moment d'ordre m $\iff$ G_X est de classe $\mathcal{C}^m$ sur $[-1, 1]$.
3. **Variable centrée réduite** Soit X une v.a. réelle admettant une variance non nulle.
   (a) La variable centrée est obtenue en soustrayant l'espérance.
   (b) La variable réduite est obtenue en divisant par l'écart-type.
   (c) La variable centrée réduite est alors :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

VII. Résultats asymptotiques

1. **Théorème : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit une suite de réels strictement positifs $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors (dem) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!\, \mathrm{e}^{\lambda}}.$$

   Cette loi est parfois appelée loi des événements rares. En effet elle correspond à un très grand nombre n d'épreuves de Bernoulli, toutes de même paramètre p très faible. Le nombre de succès suit une loi binomiale d'espérance $\lambda = np$, qui peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre λ.
2. **Théorème : Loi faible des grands nombres** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. 2 à 2 indépendantes et de même loi, admettant une variance. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\mu = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$.
   (a) On définit la moyenne empirique : $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$.
   (b) On a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

(c) En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

(dem : inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Lycée Gay-Lussac
PSI

Soit	On suppose :	Alors la loi de X est caractérisée par :	ou par : $\forall t \in [-1;1],\ G_X(t) =$	On a : $E(X) =$	et : $V(X) =$
$p \in [0;1]$.	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli)	$P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$	$(1-p)+pt$	p	$p(1-p)$
$n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (loi binomiale)	$\forall k \in [\![0;n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$[(1-p)+pt]^n$	np	$np(1-p)$
$p \in]0;1[$	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique)	$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson)	$\forall k \in \mathbb{N},\ \ P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k! e^{\lambda}}$	$e^{\lambda(t-1)}$	λ	λ