Analyse pour l'ingénieur

Table des matières

CHAPITRE 1
NOTION DE MESURE

Convention « si » dans une définition signifie « si et seulement si ».

L'objectif du chapitre est de définir la notion de mesure d'une partie d'un espace abstrait Ω, quel qu'il soit. Mesurer une partie A de Ω consiste à attribuer un nombre positif $m(A)$ qui décrit en quelque sorte la grandeur de A. Soient alors A et B deux parties de Ω. Il est naturel d'imposer la condition suivante :

$$(P): \quad A \cap B = \varnothing \implies m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

En utilisant le fait que A et $B \cap {}^c\!A$ (où ${}^c\!A$ est le complémentaire de A) sont disjoints, (P) implique $A \subset B \implies m(A) \leqslant m(B)$. Dans la suite, on va demander que la propriété d'additivité (P) soit valable non seulement pour deux ensembles disjoints, donc pour un nombre fini d'ensembles finis deux à deux disjoints, mais aussi pour une suite dénombrable de parties disjointes de Ω.

1 TRIBUS ET MESURABLES

Définitions 1.1 Soient Ω un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une collection de parties de Ω.

1. On dit que $\mathcal{A}$ est une *tribu* de Ω si :
   (a) $\Omega \in \mathcal{A}$
   (b) $A \in \mathcal{A} \implies {}^c\!A = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
   (c) $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \implies A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
2. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable*.
3. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés *ensembles mesurables*.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Propriétés 1.2 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On a :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$.
3. $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \implies A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
4. Si $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors :
   (a) $\limsup_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, où $\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$.
   (b) $\liminf_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$, où $\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$.

Exemples Soient Ω non vide et $A \subset \Omega$.

1. $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée *tribu triviale*.
2. $\{\varnothing, \Omega, A, {}^cA\}$ est une tribu sur Ω.
3. $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.

Proposition 1.3 : Tribu engendrée Soit $\Omega \neq \varnothing$. Soit C une famille de parties de Ω.

1. Il existe une plus petite tribu sur Ω qui contient C.
2. Cette tribu s'appelle *la tribu engendrée* par C, notée $\sigma(C)$.

Démonstration
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des tribus sur Ω contenant C.
On a : $\mathcal{T} \neq \varnothing$ car $\mathscr{P}(\Omega) \in \mathcal{T}$.
On considère $\bigcap\limits_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}$ et on vérifie qu'il s'agit d'une tribu. $\square$

Exemple (mêmes notations) Soit $A \in \Omega$. On a : $\sigma(\{A\}) = \{\varnothing, \Omega, A, {}^cA\}$.

Définition 1.4 : Tribu borélienne

1. On appelle *tribu borélienne* sur $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) la tribu engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$).
2. On note cette tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$).
3. Ses éléments s'appellent des *boréliens*.

Remarques

1. Tous les intervalles (ouverts, semi-ouverts, fermés) de $\mathbb{R}$ sont des boréliens, car peuvent être vus comme des intersections d'intervalles ouverts :
$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left]a - \frac{1}{n} ; b + \frac{1}{n}\right[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$$
2. Un ouvert de $\mathbb{R}$ est un borélien (réunion dénombrable d'intervalles).
3. Un fermé de $\mathbb{R}$ est un borélien.

Définition 1.5 : Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les pavés ouverts de $\mathbb{R}^n$:
$$]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_n, b_n[\qquad \text{où } \begin{cases} a_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \\ a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n \end{cases}$$
2. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

2 Mesures

Définition 1.6 : Mesure Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1. On appelle *mesure* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $m : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie :
   — $m(\varnothing) = 0$.
   — Si $(A_n)_n$ est une suite d'ensembles de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints, alors (σ-additivité) :
$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$
2. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ s'appelle un *espace mesuré*.
3. Si $m(\Omega) < +\infty$, alors on dit que m est une *mesure finie*.
4. Si $m(\Omega) = 1$, on dit que m est une *mesure de probabilité*.
5. On dit que m est *σ-finie* si :
$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, m(A_n) < +\infty \end{cases}$$

Exemple Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $a \in \Omega$. On définit :
$$\begin{array}{rccl} \delta_a : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & A & \longmapsto & \delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. On montre que c'est une mesure de probabilité.
2. Cette mesure est appelée *mesure de Dirac au point a*.

Propriétés 1.7 des mesures Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré. Soient $A, B \in \mathcal{A}$.

1. $A \subset B \implies m(A) \leqslant m(B)$.
2. $A \subset B$ et $m(A) < +\infty \implies m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.
3. $m(A \cap B) < +\infty \implies m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$
4. *Sous-additivité :* Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On a :
$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$
5. *Continuité croissante :* Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$. On a :
$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} m(A_n).$$
6. *Continuité décroissante :* Soit $(A_n)_n$ une suite décroissante de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$. On suppose $m(A_1) < +\infty$. On a :
$$m\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} m(A_n).$$

Démonstration
1. et 2. On a : $B = A \cup (B \setminus A)$.
Or : $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, donc : $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$.
Ainsi : $m(A) \leqslant m(B)$.
3. $A \cup B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$ réunion de deux ensembles disjoints.
Donc $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus (A \cap B)) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ d'après 1.
4. Posons $B_0 = A_0$, et pour tout $n \geqslant 1$, $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. De plus, les ensembles de (B_n) sont deux à deux disjoints et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset A_n$. Donc :

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n).$$

5. Posons $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Alors les B_n sont deux à deux disjoints et $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$. Ainsi :

$$m(A_n) = \sum_{k=0}^{n} m(B_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} m(B_k) = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_k\right) = m\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

6. Posons $B_n = A_0 \setminus A_n$, pour tout n. Alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A_0 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En outre, $m(B_n) = m(A_0) - m(A_n)$ car $m(A_0) < \infty$. Par (v) on a donc

$$m(A_0) - m\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(A_0) - \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

□

Théorème 1.8 : Mesure de Lebesgue Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a < b, a_1 < b_1, ..., a_n < b_n \in \mathbb{R}$.

1. Il existe une unique mesure λ_n sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ telle que :

$$\lambda_n\big(]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\big) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

2. En particulier, pour $n = 1$, on note cette mesure λ et $\lambda\big(]a, b[\big) = b - a$.
3. λ_n s'appelle *la mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^n$.

Admis

Propriétés 1.9 de la mesure de Lebesgue

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On a : $\lambda_n(\{a\}) = 0$.
2. Tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue nulle (car réunion de singletons).
3. Pour $a < b \in \mathbb{R}$, $\lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = \lambda(]a, b[)$.
4. La mesure de Lebesgue est invariante par translation.

Démonstration

1. En notant $a = (a_1, \dots, a_n)$, on a : $\{a\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left]a_1 - \frac{1}{k}, a_1 + \frac{1}{k}\right[\times \cdots \times \left]a_n - \frac{1}{k}; a_n + \frac{1}{k}\right[}_{P_k}$.

Donc : $\lambda_n(\{a\}) = \lambda_n\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \lambda_n(P_k) = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k = 0$

2. Si E est dénombrable, on peut écrire $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{e_i\}$ donc $\lambda_n(E) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_n(\{e_i\}) = 0$

3. Conséquence de 1. □

Définitions 1.10 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré.

1. On dit qu'un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est *négligeable* si $m(A) = 0$.
2. Une propriété est dite *vraie presque partout* si l'ensemble des points de Ω où elle n'est pas vraie est négligeable.

Exemple Soient $f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ x^2+28 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ et $g : x \longmapsto g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Les fonction f et g sont égales presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue car $\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant g(x)\}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
On écrit : $f = g \qquad \lambda - p.p.$

3 Applications mesurables

Proposition 1.11 Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles. Soit $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$. Soit $\mathcal{A}_2$ une tribu sur Ω_2. Alors : $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ est une tribu sur Ω_1.

Démonstration
$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$
$\Omega_1 \setminus f^{-1}(A_2) = f^{-1}(\Omega_2 \setminus A_2)$
$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(A_n)$. □

Définition 1.12 Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux ensembles mesurables.
On dit qu'une application $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est *mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.
Autrement dit, si : $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2, f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$.

Proposition 1.13 (mêmes notations) Soit C_2 une famille de parties de Ω_2 tel que : $\sigma(C_2) = \mathcal{A}_2$.

$$f \text{ est mesurable} \iff \forall A_2 \subset C_2, f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1.$$

Démonstration
($\Longrightarrow$) Clair.
($\Longleftarrow$) Posons $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega_2 \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2\}$.
On vérifie que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω_2 qui contient C.
Donc : $\sigma(C_2) \subset \mathcal{A}$.
Donc f est mesurable. □

Remarque On considère $\mathbb{R}$ muni de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est mesurable.
En effet, si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc f est mesurable d'après la proposition.

Proposition 1.14 : Critère de mesurabilité sur $\mathbb{R}$ Soit $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
f est mesurable si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \{y \in E \mid f(y) \geqslant x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \{y \in E \mid f(y) \leqslant x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \{y \in E \mid f(y) > x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \{y \in E \mid f(y) < x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Démonstration
1. $\Longleftrightarrow$ 2. On a : $\{y \in E \mid f(y) \geqslant x\} = f^{-1}([x, +\infty[)$.
Soit $C = \{[x, +\infty[\mid x \in \mathbb{R}\}$.
Il suffit de montrer que $\sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On a : $[x, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $\sigma(C) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On a : $]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[$.
On a : $]-\infty, b[= \complement[b, +\infty[\in \sigma(C)$.
De plus : $]a, +\infty[= \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, +\infty\right[$
Donc $]a, +\infty[\in \sigma(C)$
Donc $]a, b[\in \sigma(C)$.
Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(C)$. □

Proposition 1.15 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est mesurable et $h : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors : $h \circ f$ est mesurable.
2. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{array}$. Alors :
$$f \text{ est mesurable } \Longleftrightarrow f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont mesurables.}$$
3. Si $f, g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors :
   (a) $\lambda f + g$ est mesurable.
   (b) fg est mesurable.
   (c) $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables.

Démonstration
1. Pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, $(h \circ f)^{-1}(I) = f^{-1}(h^{-1}(I))$ ouvert de $\mathbb{R}^k$ donc $(h \circ f)^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car f est mesurable.
2. ($\Longrightarrow$) On suppose f mesurable.
On pose : $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$ où $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$.
π_1 et π_2 sont continues donc d'après 1., f_1 et f_2 sont mesurables.
($\Longleftarrow$) Posons $P =]a, b[\times]c, d[$.
$f^{-1}(P) = \{x \in E \mid f(x) \in P\} = \{x \in E \mid f_1(x) \in]a, b[\text{ et } f_2(x) \in]c, d[\} = f_1^{-1}(]a, b[) \cup f_2^{-1}(]c, d[)$. □

Chapitre 2
Intégration

Dans cette partie, on définit l'intégrale des fonctions numériques d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, m)$. L'intérêt de cette théorie est que non seulement elle permet d'obtenir l'intégrale des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^k$, mais elle recouvre aussi la théorie des séries numériques et les calculs de probabilité (lorsque la mesure m est une mesure de probabilité).

1 Construction de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables positives

L'idée de départ de la construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réelles est assez simple : il s'agit d'approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles, dont la base est portée par l'axe des abscisses, là où se trouve le domaine de définition de la fonction. L'idée de la construction de Lebesgue repose alors sur une sorte de renversement de la situation précédente : il s'agit toujours d'approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles, mais ceux-ci seront définis en fonctions des valeurs prises par la fonction. C'est l'idée naturelle pour compter son porte-monnaie : on regroupe les pièces par valeurs, et ensuite on compte le nombre de pièces de chaque sous-ensemble formé, on multiplie ce nombre par la valeur commune des pièces de ce sous-ensemble, puis on somme sur tous les sous-ensembles !

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré.

Définition 2.1 : Fonction caractéristique ou indicatrice
On appelle *fonction caractéristique* ou *indicatrice* de A la fonction, notée χ_A (ou $\mathbb{1}_A$), définie par :

$$\chi_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Remarque $A \in \mathcal{A} \implies \chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

Définition 2.2 : Fonction étagée
Une *fonction étagée* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Remarques

1. Si les valeurs distinctes prises par f sont $x_1, \dots, x_n$, alors, en notant $A_i = f^{-1}(\{x_i\})$:

$$(*) : f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

   En effet, si $x \in \Omega$, $f(x) \in \{x_1, \dots, x_n\}$, alors il existe i_0 tel que $f(x) = x_{i_0} \implies x \in A_{i_0}$.

2. Réciproquement, toute combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques associée à des ensembles mesurables est une fonction étagée.
3. L'écriture $(*)$ s'appelle *l'écriture canonique de f*.

Définition 2.3 Soit f une fonction étagée positive de Ω dans $\mathbb{R}_+$. Soit $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$ son écriture canonique.
On définit l'intégrale de f par rapport à la mesure m par la quantité :

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} x_i m(A_i)$$

avec la convention que $0 \times \infty = 0$.

Propriétés 2.4 Soient f et g deux fonctions étagées positives. On a :
1. $\int (f+g)\,\mathrm{d}m = \int f\,\mathrm{d}m + \int g\,\mathrm{d}m$.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+, \int af\,\mathrm{d}m = a\int f\,\mathrm{d}m$.
3. Si $f \leqslant g$, alors $\int f\,\mathrm{d}m \leqslant \int g\,\mathrm{d}m$.

Démonstration
Fait 1. Si $f = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \chi_{B_i}$ et $\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ où les B_i sont disjoints, alors :
$\int f\,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{p} \beta_i m(B_i)$.
Posons : $\forall i \in [\![1,n]\!], A_i = \bigcup_{j \in I_i} B_j$ où $I_i = \{j \in [\![1,p]\!] \mid \beta_j = \alpha_j\}$.
Fait 2. Si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ et $g = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \chi_{B_i}$ alors on peut écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i \chi_{C_i} \qquad \text{et} \qquad g = \sum_{i=1}^{m} \gamma'_i \chi_{C_i}$$

□

On peut alors définir l'intégrale des fonctions mesurables positives.

Définition 2.5 Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.
1. On appelle intégrale de f par rapport à m la quantité :

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}m = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}_+ \\ \varphi \leqslant f}} \left(\int_\Omega \varphi\,\mathrm{d}m \right).$$

2. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, on définit :

$$\int_A f\,\mathrm{d}m = \int_\Omega f\chi_A\,\mathrm{d}m.$$

Propriétés 2.6 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables et $A, B \in \mathcal{A}$. Alors :

1. $f \leqslant g \implies \displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}m \leqslant \int_\Omega g\,\mathrm{d}m.$
2. $A \subset B \implies \displaystyle\int_A f\,\mathrm{d}m \leqslant \int_B f\,\mathrm{d}m.$
3. $c \in \mathbb{R}_+ \implies \displaystyle\int_\Omega cf\,\mathrm{d}m = c\int_\Omega f\,\mathrm{d}m.$
4. $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}m < +\infty \implies f$ est finie $m-$p.p.
5. $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}m = 0 \implies f = 0\ m-$p.p.

Démonstration
1.2.3. Par définition.
4. $A = \{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\}$
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ n\chi_A \leqslant f$.
1. $\implies \displaystyle\int x\chi_A\,\mathrm{d}m \leqslant \int f\,\mathrm{d}m < +\infty.$
Donc $m(A) = 0$.
5. $B = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$.
$B_n = \left\{x \in \Omega \mid f(x) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$.
On a : $B = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ et $B_n \subset B_{n+1}$ donc $m(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} m(B_n)$.
On a : $0 = \displaystyle\int_\Omega f\,\mathrm{d}m \underset{(2.)}{\leqslant} \int_{B_n} f\,\mathrm{d}m \geqslant \frac{1}{n}m(B_n) \geqslant 0$ car $f\chi_{B_n} \geqslant \dfrac{1}{n}\chi_{B_n}$.
Donc $m(B_n) = 0$ pour tout n donc $m(B) = 0$. □

2 Premiers théorèmes de convergence

Lemme 2.7 Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable.
Il existe une suite croissante de fonctions $(\varphi_n)_n$ étagées, positives et telles que :

$$\forall x \in \Omega,\ \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Démonstration
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_{n,+\infty} = \{x \in \Omega \mid f(x) \geqslant n\}$
Et pour tous $k, n \in \mathbb{N}$: $A_{n,k} = \left\{x \in \Omega \mid \dfrac{k}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{k+1}{2^n}\right\}$ où $0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1$.
Enfin : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{A_{n,k}} + n\chi_{A_{n,\infty}}$.
On vérifie que $(\varphi_n)_n$ est croissante (exercice).
Soit $x \in \Omega$.
Si $f(x) = +\infty$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_{n,+\infty}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty = f(x)$.
Si $f(x) < +\infty$, alors il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(x) < n$.
Il existe k tel que $x \in A_{n,k} \implies \varphi_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$.

Ainsi :
$$\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n} \implies \forall n \geqslant N, 0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

□

Théorème 2.8 de Beppo Levi Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Soit f une fonction.

— On suppose :

1. $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables et positives.
2. $f_n \overset{\mathrm{CS}}{\longrightarrow} f$.

— Alors :

1. f est mesurable.
2. $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, \mathrm{d}m$

Admis

Corollaire 2.9 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions mesurables. Alors :
$$\int (f+g) \, \mathrm{d}m = \int f \, \mathrm{d}m + \int g \, \mathrm{d}m.$$

Démonstration

D'après le lemme, il existe $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ croissantes de fonctions étagées positives qui convergent simplement vers $f$et g. On a :
$$\int (f_n + g_n) \, \mathrm{d}m = \int f_n \, \mathrm{d}m + \int g_n \, \mathrm{d}m$$
Par passage à la limite et d'après le théorème de Beppo Levi, on obtient le résultat. □

Corollaire 2.10 Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Alors :
$$f = 0 \quad m - \text{p.p.} \implies \int f \, \mathrm{d}m = 0$$

Démonstration

Soit $A = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$.

Par hypothèses, $m(A) = 0$. $\varphi_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in' {}^cA \end{cases}$.

On a : $(\varphi_n)_n$ est une site croissante de fonctions mesurables positives.

$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \varphi \geqslant f(x) \implies \int \lim_{n \to +\infty} \varphi_n \, \mathrm{d}m \geqslant \int f(x) \, \mathrm{d}m(x) \geqslant 0.$

D'après Beppo Levi,
$$\int \lim_{n \to +\infty} \varphi_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to +\infty} \int \varphi(x) \, \mathrm{d}m(x) = \lim_{n \to +\infty} nm(A) = 0$$

□

Corollaire 2.11 Soient $f, g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ deux fonctions mesurables.
$$f = g \quad m - \text{p.p.} \implies \int f \, \mathrm{d}m = \int g \, \mathrm{d}m.$$

Démonstration
Soit $h = \min(f, g)$. On a donc : h est mesurable et positive.
Posons : $f_1 = f - h$, $g_1 = g - h$
f_1 et g_1 sont aussi mesurables et positives et $f_1 = g_1 = 0$ $m-$p.p.
Donc $\displaystyle\int f_1 dm = \int g_1 dm = 0$. Ainsi :

$$\int f \,\mathrm{d}m = \int (f_1 + h) \,\mathrm{d}m = \int f_1 \,\mathrm{d}m + \int h \,\mathrm{d}m = \int g_1 \,\mathrm{d}m + \int h \,\mathrm{d}m = \int (g_1 + h) \,\mathrm{d}m = \int g \,\mathrm{d}m$$

□

Définition 2.12 : Mesure de densité Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable et $A \in \mathcal{A}$.

1. On définit :
$$\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}m = \int_\Omega f \chi_A \,\mathrm{d}m$$
2. On vérifie que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Cette mesure s'appelle la *mesure de densité de f par rapport à m*. On note $\mathrm{d}\mu = f \,\mathrm{d}m$

Proposition 2.13 Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. On note la mesure de densité de f : $\mathrm{d}\mu = f \,\mathrm{d}m$. On a alors :

$$\forall g : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ mesurable}, \int g \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}m.$$

Démonstration
Prenons $g = \chi_A$, $A \in \mathcal{A}$. Alors :

$$\int g \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}m = \int f \chi_A \,\mathrm{d}m = \int f g \,\mathrm{d}m$$

Par linéarité la formule est vraie pour tout g étagée positive. Puis on l'étend à toute fonction g mesurable positive avec Beppo Levi. □

3 Généralisation de l'intégrale et théorème de convergence dominée

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable pas nécessairement positive.
On pose : $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$.
Ces deux fonctions sont mesurables et positives. On a : $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$.

Définition 2.14 : Intégrabilité

1. On dit que f est *intégrable* sur Ω si :
$$\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}m < +\infty$$
2. On note $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.
3. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, on définit l'intégrale de f comme :
$$\int f \,\mathrm{d}m = \int f_+ \,\mathrm{d}m - \int f_- \,\mathrm{d}m$$

Propriétés 2.15 Soient g et f deux fonctions mesurables de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$

1. Si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g = f$ $m-$pp, alors $g \in \mathcal{L}^1\Omega)$ et $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}m = \int g \, \mathrm{d}m$.
2. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, et $f \leqslant g$ $m-$pp, alors $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}m \leqslant \int g \, \mathrm{d}m$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega) \implies \displaystyle\int (\lambda f + g) \, \mathrm{d}m = \lambda \int f \, \mathrm{d}m + \int g \, \mathrm{d}m$.
4. Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, alors $\displaystyle\left| \int f \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |f| \, \mathrm{d}m$.

Lemme 2.16 de Fatou Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int \underline{\lim} f_n \, \mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim} \int f_n \, \mathrm{d}m$$

Démonstration
$\underline{\lim} f_n$ et une fonction mesurable positive.
Posons pour tout entier k : $g_k = \inf\limits_{n \geqslant k} f_n$ et $\underline{\lim} f_n = \lim\limits_{k \to +\infty} g_k$.
$(g_k)_k$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives.
D'après le théorème de Beppo Levi, $\displaystyle\int \lim_{k \to +\infty} g_k \, \mathrm{d}m = \lim_{k \to +\infty} \int g_k \, \mathrm{d}m$.
Donc : $\displaystyle\int \underline{\lim} f_n \, \mathrm{d}m = \lim_{k \to +\infty} \int g_k \, \mathrm{d}m$.
Or : $\forall n \geqslant k, \; g_k \leqslant f_n \implies \displaystyle\int g_k \, \mathrm{d}m \leqslant \int f_n \, \mathrm{d}m$.
Donc $\displaystyle\int g_k \, \mathrm{d}m \leqslant \inf_{n \geqslant k} \int f_n \, \mathrm{d}m$. Quand $k \longrightarrow +\infty$,

$$\int \underline{\lim}_{k \to +\infty} f_n \, \mathrm{d}m = \lim_{k \to +\infty} \int g_k \, \mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim}_{n \to +\infty} \int f_n \, \mathrm{d}m$$

Théorème 2.17 de convergence dominée Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de mesurables.

— On suppose :
  1. $\exists f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable tel que $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ $m-$pp.
  2. l'hypothèse de domination : $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega), \; \forall n \geqslant 1, \; |f_n| \leqslant g \quad m-$pp.

— Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, \mathrm{d}m = \int f \, \mathrm{d}m$$

Démonstration
On a : les f_n et f sont intégrables d'après 1.
On peut supposer que 2. a lieu partout. Les suites $(g_n)_n = (g + f_n)_n$ et $(h_n)_n = (g - f_n)_n$ sont des suites de fonctions mesurables positives.
D'après le lemme de Fatou,

$$\int (g + f) \, \mathrm{d}m = \int \underline{\lim}(g + f_n) \, \mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim} \int (g + f_n) \, \mathrm{d}m$$

$$\int (g-f)\,\mathrm{d}m = \int \underline{\lim}(g-f_n)\,\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim} \int (g-f_n)\,\mathrm{d}m$$

Donc :

$$\int g\,\mathrm{d}m + \int f\,\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m$$

$$\int g\,\mathrm{d}m - \int f\,\mathrm{d}m \leqslant \overline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m$$

Donc :

$$\overline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m \leqslant \int f\,\mathrm{d}m \leqslant \underline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m \leqslant \overline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m$$

D'où : $\overline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m = \underline{\lim} \int f_n\,\mathrm{d}m = \int f\,\mathrm{d}m$.

Donc la suite $\left(\int f_n\,\mathrm{d}m\right)$ converge vers $\int f\,\mathrm{d}m$. □

Corollaire 2.18 : Cas des séries de fonctions

— Si $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et est telle que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|\,\mathrm{d}m < +\infty$$

— Alors :

1. $\sum_n f_n$ CV $m-$p.p.
2. Sa somme est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$
3. On a :

$$\int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}m$$

Démonstration

D'après Beppo Levi : $\displaystyle\int \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|\,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|\,\mathrm{d}m < +\infty$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ est finie $m-$pp. Donc $\displaystyle\sum_n f_n$ AC donc converge $m-$pp.

Donc : $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $\displaystyle S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, alors $\displaystyle S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ $m-$pp.

De plus : $\displaystyle |S_N| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |f_n| \leqslant g = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$.

On a $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int S_N\,\mathrm{d}m = \int \lim_{N\to+\infty} S_N\,\mathrm{d}m$

C'est à dire : $\displaystyle\int \lim_{N\to+\infty} S_N\,\mathrm{d}m = \int \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,\mathrm{d}m$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int S_N\,\mathrm{d}m = \lim_{N\to+\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n\,\mathrm{d}m = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n\,\mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}m$. □

Théorème 2.19 : Continuité sous le signe somme
Soit $x_0 \in \Omega$.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$.
Soit $f : U \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note $F(x) = \displaystyle\int_\Omega f(x,\omega)\,\mathrm{d}m(\omega)$.

— On suppose :
  1. Pour presque tous $\omega \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto f(x,\omega)$ est continue en x_0.
  2. Pour tout $x \in U$, $\omega \longmapsto f(x,\omega)$ est mesurable.
  3. $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega),\ \forall x \in U,$ pour presque tout $\omega \in \Omega,\ |f(x,\omega)| \leqslant g(\omega)$.

— Alors F est bien définie sur U et est continue en x_0.

Démonstration
On a : pour tout $x \in U$, $\omega \longmapsto f(x,\omega) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$. F est donc bien définie sur U.
Soit $(a_n)_n \in U^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x_0.
On a : $F(a_n) = \displaystyle\int f(a_n,\omega)\,\mathrm{d}m(\omega)$.
On a : $f_n(\omega) = f(a_n,\omega) \longrightarrow f(x_0,\omega)$ presque pour tout ω.
De plus, $|f_n(\omega)| \leqslant g(\omega)$ où $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ d'après l'hypothèse 3.
D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} F(a_n) = \int \lim f_n(\omega)\,\mathrm{d}m(\omega) = \int f(x_0,\omega)\,\mathrm{d}m(\omega) = F(x_0)$$

Donc F est continue en x_0. □

4 Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

Proposition 2.20 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors :

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda}_{\text{Lebesgue}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Riemann}}$$

Proposition 2.21 Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On peut avoir $b = +\infty$. Alors :

1. $f \in \mathcal{L}^1([a,b[) \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$.
2. Dans ce cas, on a :

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

5 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$

Théorème 2.22 de Fubini-Torelli Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, où $\mathbb{R}^2$ est muni de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x)$$

Théorème 2.23 de Fubini Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable et intégrable. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x)$$

6 Espaces L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré.
Soit $p \in \mathbb{R}, p > 1$.
On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dans $\mathcal{L}^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega, m) = \mathcal{L}^p$ si :

$$\int |f|^p \,\mathrm{d}m < +\infty$$

On note $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}m \right)^{1/p}$, où $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

Proposition 2.24 : Inégalité de Hölder Soit $p > 1$. Soit q son exposant conjugué, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, autrement dit $q = \frac{p}{p-1}$.

$$f \in \mathcal{L}^p,\ g \in \mathcal{L}^q \implies fg \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

<u>Démonstration</u>
On remarque que pour tous $a, b > 0$, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
Si $\|f\|_p = 0$, alors $|f| = 0$ $m-$pp. Donc $f = 0$ $m-$pp.
Donc $fg = 0$ $m-$pp. Donc l'inégalité est triviale.
De même si $\|g\|_q = 0$.
On suppose donc que $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ non nuls. Pour tout $x \in \Omega$, on pose $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ et $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$.
On a : $ab = \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|^q}$.
Donc : $\frac{1}{\|f\|^p \|g\|_q} \int |fg| \,\mathrm{d}m \leqslant \frac{1}{p} \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p \,\mathrm{d}m + \frac{1}{q} \frac{1}{\|g\|_q^q} \int |g|^q \,\mathrm{d}m = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ □

Proposition 2.25 : Inégalité de Minkowski
— On suppose : f et g sont deux fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$.
— Alors : $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Démonstration
$|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$ donc $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.
On applique Hölder :

$$\int |f||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}m \leqslant \left(\int |f|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}\left(\int |f+g|^{\frac{p}{(p-1)q}}\,\mathrm{d}m\right)^{1/q}.$$

Or : $q = \dfrac{p}{p-1}$, soit $q(p-1) = p$.
Donc $\displaystyle\int |f||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}m \leqslant ||f||_p||f+g||_p^{p/q}$.
De même, en échangeant f et g, on a :

$$\int |f+g|^p\,\mathrm{d}m = \int |f+g||f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}m \leqslant \int (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}m.$$

Donc : $\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\,(\|f\|_p + \|g\|_p)$.
Donc : $\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.
Enfin : $p - \dfrac{p}{q} = p\left(1-\dfrac{1}{q}\right) = p \times \dfrac{1}{p} = 1$. □

Nécessité d'une relation d'équivalence Soient $f \in \mathcal{L}^p$ et λ un réel. On a : $\|\lambda f\|_p = \lambda\|f\|_p = 0 \implies f = 0$ $m-$pp, mais pas partout. Ainsi, on ne peut pas considérer $\|\cdot\|_p$ comme une norme. Pour contourner cette difficulté, on introduit une relation sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$: on note $f \sim g$ si $f = g$ $m-$pp. C'est une relation d'équivalence.

Définition 2.26 : Espace L^p

1. On pose $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)_{/\sim}$ l'espace quotient par la relation d'égalité pp pour la mesure m de l'espace $\mathcal{L}^p$.
2. En notant $[f] = \{g \in L^p(\Omega) \mid g \sim f\} \in L^p(\Omega)$, on pose :

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int |f|^p\,\mathrm{d}m\right)^{1/p}.$$

Si $g \in [f]$, alors $g \sim f$ et donc $f = g$ $m-$pp et donc $\displaystyle\int |g|^p\,\mathrm{d}m = \int |f|^p\,\mathrm{d}m$.
On montre alors que

Théorème 2.27 Soit $p \geqslant 1$. On a : $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 2.28

1. On dit que $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *essentiellement bornée* s'il existe $M > 0$ tel que

$$(*) : m(\{x \in \Omega \mid |f(x) > M|\} = 0$$

2. On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur Ω et pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid M \text{ vérifie } (*)\}.$$

3. Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, on montre que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ pour presque tout x.
4. De même que pour $\mathcal{L}^p$, on pose $L^\infty = \mathcal{L}^\infty_{/\sim}$ et $\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ où $f \in \mathcal{L}^\infty$. $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn.

Théorème 2.29 d'approximation On considère $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et p tel que $1 \leqslant p < +\infty$.

1. L'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
2. L'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

On définit maintenant les suites de Cauchy. On va voir qu'elles convergent toutes dans l'espace L^p.

Définition 2.30 : Suite de Cauchy Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.
Une suite $(x_n)_n$ de E est dite *de Cauchy* si $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \|x_n - x_m\| = 0$.

Propriétés 2.31 des suites de Cauchy Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

1. Toute suite convergent est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence est convergente.

Démonstration
1. Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers ℓ. Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| < \varepsilon/2$. Alors on a :

$$\forall\, p, q \geqslant N,\ \|u_p - u_q\| \leqslant \|u_p - \ell\| + \|u_q - \ell\| = \varepsilon.$$

2. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, p, q \geqslant N,\ \|u_q - u_p\| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $\|u_n\| \leqslant \|u_n - u_N\| + \|u_N\|$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant \max\{\|u_0\|, \dots, \|u_N\|, \|u_N\| + \varepsilon\}.$$

3. Soit (u_n) une suite de Cauchy et ℓ une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque (u_n) est de Cauchy, on peut trouver un entier N tel que pour tous $p, q \geqslant N$, $\|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon/2$. De plus, puisque ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n_0 \geqslant N$ tel que $\|u_{n_0} - \ell\| \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n - \ell\| \leqslant \|u_n - u_{n_0}\| + \|u_{n_0} - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Cela signifie exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Définitions 2.32

1. Un evn E est dit *complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E.
2. On dit alors que E est un *espace de Banach*.

Proposition 2.33 $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Démonstration
Idée : Soit $([f_n])_n$ une suite de Cauchy de $L^p(\Omega)$:

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0.$$

On peut montrer qu'il existe une sous suite (f_{n_k}) telle que $\forall k \geqslant 1,\ \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.
On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g_k = \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{+\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$$

g et les g_k sont mesurables et positives. De plus, (g_k) est croissante.
On a $g_k \xrightarrow{\text{CS}} g$. Le théorème de Beppo Levi donne :

$$\lim_{k \to +\infty} \int g_k^p \,\mathrm{d}m = \int g^p \,\mathrm{d}m$$

De plus :

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|f_{n,j+1} - f_{n,j}\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc : $\displaystyle\int g^p \,\mathrm{d}m \leqslant 1$.
Ainsi : $g \in \mathscr{L}^1$, donc g^p est fini $m-$pp, donc la série $\displaystyle\sum_j (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ AC donc converge $m-$pp.
On pose :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} f_{n_j}(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \left(f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)\right) \text{ si } g(t) < +\infty \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On montre que $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$, que $f_{n_j}(t) \longrightarrow f(t)$ $m-$pp et que $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$ (Fatou). □

Chapitre 3 Introduction à la théorie des distributions

Si on considère une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la valeur prise par cette fonction en x_0, notée $f(x_0)$, n'a que peu de sens pratique. En effet, si on considère la pièce dans laquelle vous êtes par un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et f la fonction qui à un point donné associe la pression en ce point, les valeurs prises par f ne sont pas mesurables. Ce que l'on peut effectivement mesurer, à l'aide d'un baromètre placé au dit point, c'est la pression exercée sur le baromètre, qui n'est pas assimilable à un point. On obtient alors plutôt la valeur moyenne de la pression exercée sur l'ensemble du baromètre. Mathématiquement, cela signifie que l'on a obtenu $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ avec φ une fonction dont le support (l'ensemble des points x tels que $\varphi(x) \neq 0$) est « l'espace occupé par le baromètre ». Autrement dit, le baromètre retourne la valeur moyenne de f prise dans le support de φ avec la densité φ. On en déduit que le support de φ sera proche du point x et que plus l'intégrale de φ sera proche de 1, plus la mesure sera précise. L'idéal serait d'avoir $\int_{\mathbb{R}^3} \varphi = 1$ et $\operatorname{supp}\varphi = x_0$, ce qui n'est bien sûr pas possible. L'idée générale est donc de ne pas considérer les valeurs $f(x)$ d'une fonction mais plutôt de s'intéresser aux valeurs de l'application qui à une fonction φ associe $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Dans toute la suite, on considère le cas $n = 1$, que l'on peut généraliser au cas n quelconque.

1 Espaces des fonctions-test et des distributions

1.1 Espace des fonctions-test

Définition 3.1 : Support d'une fonction Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle support de φ le plus petit fermé qui contient $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$:

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Remarque On a donc pour tout $x \notin \operatorname{supp}(\varphi)$, $\varphi(x) = 0$.

Définition 3.2 : Espace des fonctions-test
On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact. Cet espace s'appelle *l'espace des fonctions-test*. C'est un espace vectoriel.

Remarque $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \neq \varnothing$.
Démonstration
Soit $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
$\operatorname{supp}(\varphi) = [-1, 1]$ donc $\operatorname{supp}(\varphi)$ est compact.
$\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Par récurrence, on montre que $\forall x \in]-1,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}$ où P_n est un polynôme de degré $3n-2$.
En posant $u = \dfrac{1}{x^2-1}$ on a $\lim\limits_{x \to 1^-} u^{2n} \, \mathrm{e}^{-u} = 0$.
Donc $\forall n \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi^n(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x)$.
Donc φ est indéfiniment dérivable en 1 et $\varphi^{(n)}(x) = 0$ pour tout entier n.
Donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. □

Théorème 3.3 Soit f une fonction continue et à support contenu dans un compact. Alors :

1. $\exists \{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi_\alpha \xrightarrow[\alpha \to 0]{\text{CU}} f$.
2. Autrement dit, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_{cc}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact muni de la norme
$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$$

Admis

Il n'est pas absolument nécessaire pour la suite de munir formellement l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'une structure topologique précise. On se contente d'introduire la notion de suite convergente dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Définition 3.4 : Suite convergente de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

1. Si $(\varphi_j)_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, on dit que $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si :
   (a) il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que $\forall j \geqslant 1$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$
   (b) $\forall l \in \mathbb{N}$, $\varphi_j^{(l)} \xrightarrow[K]{\text{CU}} 0$, c'est-à-dire $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_j^{(l)}(x)| \xrightarrow[K]{\text{CS}} 0$.
2. Une suite $(\varphi_j)_j$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $\varphi_j - \varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Notation (non officielle) On note « $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} \varphi$ » pour « $\varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ».

Proposition 3.5

— Si $(\varphi_j)_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} 0$,

— Alors
   1. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $f\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} 0$.
   2. $\varphi_j' \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} 0$.

Démonstration (application directe de la définition précédente)
1. $\operatorname{supp}(f\varphi_j) \subset \operatorname{supp}(\varphi_j) \subset K$.
Donc $f\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
$(f\varphi_j)^{(l)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} f^k \varphi_j^{l-k}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(f\varphi_j)^{(l)}(x)| = \sup_{x \in K} |(f\varphi_j)^{(l)}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{l} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}| \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_j^{(l-k)}|$$

□

Notation

1. On note de manière générique, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $\partial^\alpha f$ la dérivée de longueur α (c'est-à-dire la dérivée α-ième de f).
2. Pour $n > 1$, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $\partial^\alpha f$ la dérivée partielle de f de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, où l'on a dérivée α_1 fois par rapport à la première variable, α_2 fois par rapport à la deuxième, etc.

1.2 Espace des distributions

Définition 3.6 : Distribution

1. On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ toute application linéaire et continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Remarque

1. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un evn sur $\mathbb{R}$.
2. Si $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, alors T est une distribution si
$$\forall (\varphi_j)_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}},\ \varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} 0.$$
Dans ce cas, $T(\varphi_j)' \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$.

Les trois exemples à suivre sont à connaître.

Exemple à connaître Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions localement intégrables (c'est-à-dire des fonctions intégrales sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$). On pose :
$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & T_f(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

On a :

1. T_f est une distribution.
2. T_f est linéaire.
3. T_f est continue.

Démonstration

1. $x \longmapsto f(x)\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$, car $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \exists a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ et φ est bornée.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \chi_{[a,b]}(x)|f(x)|$. Donc $T_f(\varphi) \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. $|T_f(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|$. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \operatorname{supp}(\varphi) \subset [a, b]$.
On a donc : $|T_f(\varphi)| = \left|\int_a^b \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x.$
Donc $|T_f(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_\infty$ où $C = y\int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x$.
Supposons que $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $\forall j$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subset [a, b]$, $\|\varphi_j\|_\infty \longrightarrow 0$. Donc $|T_f(\varphi_j)| \leqslant C\|\varphi_j\|_\infty \longrightarrow 0$. □

Définition 3.7 : Régularité, singularité

1. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on dit que T est *régulière* si il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tel que $T = T_f$.
2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est pas régulière, on dit que T est *singulière*.

Par abus de langage/notation, on identifiera une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et T_f.

Exemple à connaître Soit δ_0 définie par : $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. On a :

1. $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. δ_0 s'appelle le *dirac en 0*.
2. δ_0 est singulière.

Démonstration
1. On vérifie aisément que δ_0 est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.
Si $\varphi_j \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $|\delta_0(\varphi_j)| \leqslant \|\varphi_j\|_\infty \longrightarrow 0$. Donc $\delta_0(\varphi_j) \longrightarrow 0$. Donc $\delta_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ tel que $\delta_0 = T_f$.
$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \varphi(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.
Soit $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{1/(x^2-1)}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) = \varphi(nx)$.
On a : $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\varphi_n = \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$.
$1/\mathrm{e} = \varphi(0) = \varphi_n(0) = \displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x$.
$1/\mathrm{e} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \chi_{[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\varphi(nx)f(x)\,\mathrm{d}x$.
$\forall x \neq 0,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \chi_{[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\varphi(nx)f(x) = 0$
$\chi_{[\frac{-1}{n},\frac{1}{n}]}(x)\varphi(nx)f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\chi_{[-1,1]}(x)|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$.
Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0$: absurde. □

Exemple à connaître $x \longmapsto 1/x \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On définit la valeur principale de $1/x$:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \mathrm{Vp}\,(1/x)\,(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leqslant|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

C'est une distribution sur $\mathbb{R}$.
Démonstration
Soit $\varphi \in \mathcal{D}\mathbb{R})$. $\varphi(x) = \varphi(0) + \displaystyle\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
Par un changement de variable pour x non nul $u = t/x$:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(ux)\,\mathrm{d}u = \varphi(0) + x\psi(x) \text{ en posant } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(ux)\,\mathrm{d}u.$$

On a : $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_\infty \leqslant \|\varphi'\|_\infty$.
$\displaystyle\int_{\varepsilon<|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant R} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ où $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$.
$= \displaystyle\underbrace{\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant R} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x}_{=\,0 \text{ car } 1/x \text{ impaire}} + \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant R} \psi(x)\,\mathrm{d}x.$
Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leqslant|x|} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\mathrm{Vp}(1/x)(\varphi) = \displaystyle\int_{|x|\leqslant R} \psi(x)\,\mathrm{d}x$.
$\mathrm{Vp}\,(1/x) \in \mathbb{R}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, car $\displaystyle\int_{-R}^{R} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x$ converge.
$\mathrm{Vp}\,(1/x)$ est linéaire.
$|\mathrm{Vp}\,(1/x)\,(\varphi)| \leqslant 2R\|\psi\|_\infty \leqslant 2R\|\varphi'\|_\infty$. Donc $\mathrm{Vp}\,(1/x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. □

On introduit maintenant la notion de convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Définition 3.8 : Notion de convergence dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ Soient $(T_n)_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.
On dit que $T_n \xrightarrow[\mathscr{D}'(\mathbb{R})]{\text{CS}} T$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), T_n(\varphi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} T(\varphi).$$

Exemple Si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow 0$, alors $\delta_{x_n} \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (où $\forall a \in \mathbb{R}, \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$)
En effet, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\delta_{x_n}(\varphi) = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$ par continuité de φ.
Donc $\delta_{x_n} \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

On retiendra également le résultat important suivant.

Proposition 3.9 Il existe une suite de distributions régulières $(T_{f_n})_n$ où $(f_n)_n \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $T_{f_n} \xrightarrow{\text{CS}} \delta$.

Démonstration
On fixe $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(t) = nf(nt)$. $f_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a : $T_{f_n}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(nt)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
En effectuant le changement de variable $u = nt$: $T_{f_n}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathrm{d}u$.
Ainsi :

1. $f(u)\varphi(u/n) \longrightarrow f(u)\varphi(0)$ quand $n \to +\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.
2. $|f(u)\varphi(u/n)| \leqslant \|\varphi\|_\infty |f(u)| \in L^1(\mathbb{R})$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\varphi(0)\,\mathrm{d}u = \varphi(0) = \delta(\varphi)$. □
On admet le théorème suivant, qui repose principalement sur le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 3.10
— Si (T_j) est une suite de distributions sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \lim_{j \to +\infty} T_j(\varphi) \text{ existe,}$$

— Alors la forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),\ T(\varphi) = \displaystyle\lim_{j \to +\infty} T_j(\varphi)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Admis

Enfin, on définit la notion de support d'une distribution. La chose n'est pas aisée car une distribution est définie sur un espace de fonctions et pas sur $\mathbb{R}$, alors que, par analogie avec les fonctions, on aimerait que son support soit un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On aura donc une définition en deux étapes.

Définition 3.11 Soit T une distribution. Soit U un ouvert.
On dit que T est nulle sur U si :

$$\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}\varphi \subset U,\ T(\varphi) = 0.$$

On peut alors expliciter la notion de support d'une distribution.

Définition 3.12 : Support d'une distribution Soit T une distribution.
On appelle *support de la distribution* T le plus petit fermé tel que T soit nulle dans son complémentaire :

$$\operatorname{supp}(T) = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ T \text{ nulle sur } \mathbb{R}\backslash F}} F.$$

Remarques

1. $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}(T) \iff \exists\varepsilon > 0$ tel que
   $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[,\ T(\varphi) = 0.$
2. Par contraposée : $x_0 \in \operatorname{supp}(T) \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \operatorname{supp}(\varphi) \subset]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[,\ T(\varphi) \neq 0.$
3. Si F et fermé, alors $\operatorname{supp}(T) \subset F \iff T$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus F$.

Exemples

1. On vérifie que le support de la distribution de Dirac en 0 est $\{0\}$.

δ est nulle sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ car si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^*$. $\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0$ car $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$. Donc $\operatorname{supp}\varphi \subset \{0\}$. Pour l'inclusion réciproque, on utilise la remarque 2. : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\varphi) \subset] - \varepsilon, +\varepsilon[,\ \delta(\varphi) \neq 0$, donc $\{0\} \subset \operatorname{supp}\delta$.

2. Soit H la fonction définie de manière suivante :

$$H : x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle la *fonction d'Heaviside*. On a $\operatorname{supp} T_H = \mathbb{R}_+$.
Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset] - \infty, 0[$.

$$T_H(\varphi) = \int_{\infty}^{+\infty} H(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{car } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) = 0.$$

Donc T_H est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Donc $\operatorname{supp}(T_H) \subset \mathbb{R}_+$.
Réciproquement, soient $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon > 0$. On définit φ comme une fonction en cloche positive sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et nulle sinon.

$$T_H(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp}(T_H)$, donc $\operatorname{supp}(T_H) = \mathbb{R}_+$.

2 Opérations sur les distributions

2.1 Multiplication des distributions

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables, le produit fg n'est pas nécessairement localement intégrable (par exemple avec $\forall x \neq 0, f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$. T_f et T_g tant deux distributions régulières, il est difficile de donner un sens au « produit » $T_f T_g$: on aurait envie d'écrire $T_f T_g = T_{fg}$ mais cette dernière distribution n'a pas nécessairement de sens. En revanche, on remarque que si g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors le produit $g\varphi$ appartient encore à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que l'on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} (gf)\varphi = \int_{\mathbb{R}} f(g\varphi).$$

Ces propriétés permettent de donner un sens au produit d'une distribution (régulière ou non) par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 3.13 Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et T une distribution sur $\mathbb{R}$.
On définit la distribution $g.T$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ (g.T)(\varphi) = T(g\varphi)$.

Remarque L'assertion 1. de la proposition 3.5 assure que $g.T$ est bien une distribution, lorsque T est une distribution et g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration
$g.T$ est linéaire et continue.
Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge simplement vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. La proposition assure que $g\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R})]{\text{CS}} 0$.
$T \in \mathcal{D}'\mathbb{R})$, donc T est continue, et donc $T(g\varphi_n) = (g.T)(\varphi_n) \xrightarrow{\text{CS}} 0$.
Ainsi, $g.T$ est continue. Donc $g.T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. □

Exemples d'applications

1. Résoudre l'équation $xT = 0$.

Résolution
On cherche à déterminer l'ensemble $\{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid xT = 0\}$.

$$\begin{aligned} xT = 0 &\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), (xT)(\varphi) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), T(x\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Fixons $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \varphi_0(0) = 1$.
Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
$h = \psi - \psi(0)'\varphi(0) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
$h(0) = \psi(0) - \psi(0)\varphi_0(0) = 0$.
Supposons $x \neq 0$.
$h(x) = h(x) - h(0) = \displaystyle\int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t$.
En faisant le changement de variable $t = ux \Leftrightarrow u = t/x,\ h(x) = x \displaystyle\int_0^1 h'(ux)\,\mathrm{d}u = x\varphi(x)$. Ainsi :

$$\varphi(x) = \int_0^1 h'(ux)\,\mathrm{d}u$$

On montre que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi$ est compact. Ainsi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
On a montré que : $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi = \psi(0)\varphi_0 + x\varphi$.
Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et vérifie $xT = 0$, alors $T(\psi) = \psi(0)T\varphi_0 + T(x\varphi) = c\delta(\varphi)$ (car T linéaire), où $c = T\varphi_0 \in \mathbb{R}$.
Donc si T vérifie l'équation, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $T = c\delta$.
Réciproquement, $(x(c\delta))(\varphi) = c\delta(x\varphi) = c0 \times \varphi(0) = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ xT = 0 \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ T = c\delta.}$$

2. Montrons que $x\mathrm{Vp}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

On pose pour tout réel x : $I(x) = x$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\big(I.\mathrm{Vp}(1/x)\big)(\varphi) = \mathrm{Vp}(1/x)(I\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x|} \frac{I(x)\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_(\varphi).$$

On écrit par abus de notation : $x\mathrm{Vp}(1/x) = 1$, au sens des distributions.

2.2 Dérivation d'une distribution

Contrairement aux fonctions, on va voir que les distributions sont toujours dérivables, leurs dérivées sont elles-mêmes des distributions. C'est la propriété essentielle qui justifie l'introduction des distributions. On commence par la remarque suivante.

Remarque Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, et dérivable. On a alors (IPP) :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -T_f(\varphi').$$

Cela nous amène à définir de manière naturelle la dérivée d'une distribution de la façon suivante :

Définition 3.14 : Dérivée d'une distribution Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$.
On définit la dérivée de T, notée T', par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T'(\varphi) = -T(\varphi')$.

Proposition 3.15 : Stabilité de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par dérivation $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \implies T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Démonstration
On vérifie que T' est linéaire.
T' est continue car si $\varphi_n \xrightarrow{\text{CS}} 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a alors $\varphi_n' \xrightarrow{\text{CS}} 0$.
Donc $-T(\varphi_n') \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, soit $T'(\varphi_n) \longrightarrow 0$.
Donc T' est continue. □

Proposition 3.16 : Formules de dérivation Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors :

1. $\forall j \geqslant 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ (f.T^{(j)})(\varphi) = (-1)^j T((f\varphi)^{(j)})$.a
2. $(f.T)' = f'.T + f.T'$.
3. *Formule de Leibniz :* $\forall j \geqslant 0,\ (f.T)^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} f^{(k)}.T^{(j-k)}$.

Démonstration
1. $(fT^{(j)}(\varphi) = T^{(j)}(f\varphi) = (-1)^j T((f\varphi)^{(j)})$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$(f.T')(\varphi) = -(f.T)(\varphi') = -T(f\varphi') = -T((f\varphi)' - f'\varphi) = -T((f\varphi)') + T(f'\varphi) = T'(f\varphi) + f'.T(\varphi) = f.T'(\varphi) + f'.T(\varphi).$$

3. par récurrence. □

Exemples

1. La dérivée de la fonction de Heaviside (échelon unitaire) au sens des distributions est égale au dirac (en 0). Plus généralement :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ T_h^{(j)}(\varphi) = (-1)^{j-1}\varphi^{(j-1)}(0).$$

En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T'_H(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\big[\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) - \varphi(0)\big] = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$.
Donc $T'_H = \delta_0$. Par abus de notation, on écrit $H' = \delta$, au sens des distributions.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en x_0, où elle présente une discontinuité de première espèce (limites à gauche et à droite finies mais différentes). On a alors :

$$T'_f = \big(f(x_0^+) - f(x_0^-)\big)\delta_{x_0} + T_{\{f'\}},$$

où $\{f'\}$ est la fonction définie par f' sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. On dira que c'est la dérivée de f sur les intervalles où f est dérivable.

Ce deuxième exemple donne la généralisation suivante :

Théorème 3.17 : Formule des sauts Soient n nombres réels $a_1 < \cdots < a_n$. Soit f une fonction réelle.
- On suppose :
  1. $f \in \mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ pour i allant de 1 à $n-1$.
  2. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f admet en a_i une limite à gauche et une limite à droite notées respectivement $f(a_i^-)$ et $f(a_i^+)$.
- Alors :

$$T'_f = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^{n} \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$$

  en notant $\{f'\}$ la dérivée par morceaux de f.

Démonstration
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$T'_f(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or (IPP) :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)\varphi(t)]_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \{f'\}(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$T'_f(\varphi) = -\sum_{k=0}^{n} \big([f(t)\varphi(t)]_{a_k}^{a_{k+1}}\big) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t}_{T_{\{f'\}}(\varphi)}$$

1. Si $\boxed{k=0}$, $[f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{a_1} = f(a_1^-)\varphi(a_1)$.
2. Si $\boxed{1 \leqslant k \leqslant n-1}$, $[f(t)\varphi(t)]_{a_k}^{a_{k+1}} = f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1}) - f(a_k^+)\varphi(a_k)$.
3. Si $\boxed{k=n}$, $[f(t)\varphi(t)] = -f(a_n^+)\varphi(a_n)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=0}^{n}[f(t)\varphi(t)]_{a_k}^{a_{k+1}} &= -f(a_1^-\varphi(a_1) - \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1})\Big) + \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(a_k^+\varphi(a_k)\Big) + f(a_n^+\varphi(a_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}[f(a_k^+) - f(a_k^-)]\varphi(a_k) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}(f(q_k^+) - f(a_k^-))\delta_{a_k}\right)(\varphi)
\end{aligned}$$

□

Cette formule est encore valable si l'ensemble des points de discontinuité de première espèce (a_i) est infini dénombrable (mais localement fini, c'est-à-dire fini sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$). La preuve est la même.

Enfin, on généralise sur $\mathbb{R}^n$ la dérivation des distributions de la manière suivante.

Définition 3.18 Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$.
Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution dérivée d'ordre α de T, notée $\partial^\alpha T$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \partial^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi).$$

On vérifie que l'on a bien défini une distribution.

On peut remarquer que l'opérateur de dérivation sur l'espace des distributions est continu.

Proposition 3.19 L'application $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est continue.

Cette proposition a de lourdes conséquences : elle signifie par exemple que si $(T_j)_j$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $(T_j')_j$ converge vers T' dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On peut en déduire :

Proposition 3.20 Toute série de distributions convergente est dérivable terme à terme.

Remarque L'équation $U' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a pour solution exactement les distributions régulières associées à une constante, c'est à dire $U = T_C$, où C est une constante.
Démonstration Exercice □

3 Produit de convolution de distributions

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. La fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est aussi intégrable en y pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}y \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty
\end{aligned}$$

On définit alors le produit de convolution de deux fonctions de L^1.

Définition 3.21 : Produit de convolution de foncions Soit f et g deux fonctions de L^1.
Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y.$$

1. $f * g$ s'appelle *le produit de convolution* de g par f.
2. Par un changement de variable, on a : $f * g = g * f$ pp.
3. $f * g \in L^1$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \times \|g\|_1$.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On note $h = f * g$. O a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ T_h(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_R \left(\int_R f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = (Fubini) \int_{\mathbb{R}} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-x)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Soit :

$$T_h(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)\varphi(u+x)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

Cette dernière relation permet d'étendre intuitivement le produit de convolution aux distributions. Pour cela, on a besoin de définir le produit tensoriel de deux distributions. Afin d'éviter toute ambiguïté, on introduit la notation suivante :

Notation Soient T et S deux distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.
Pour φ_x et φ_y dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \varphi_x(y) = \varphi_y(x) = \varphi(x, y)$.
On admet que les deux fonctions $x \longmapsto T(\varphi_x)$ et $y \longmapsto S(\varphi_y)$ sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et qu'on a :

$$S(x \longmapsto T(\varphi_y)) = T(y \longmapsto S(\varphi_x))$$

L'égalité se réécrit par abus de notation $S_x(T_y(\varphi(x, y))) = T_y(S_x(\varphi(x, y)))$.

Théorème-Définition 3.22 : Produit tensoriel On utilise la notation précédente.
On appelle *produit tensoriel des distributions S et T* la distribution $T \otimes S$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ T \otimes S = S_x(T_y(\varphi(x, y))).$$

Démonstration
On admet que $T \otimes S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. □

Remarque

1. $T \otimes S = S \otimes T$.
2. Si $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}(T \otimes S)(\varphi) &= T_y(S_x(\varphi_1(x)\varphi_2(y))) \\ &= T_y(\varphi_2(y)S(\varphi_1)) \\ &= S(\varphi_1)T(\varphi_2)\end{aligned}$$

Définition 3.23 : Produit de convolution de distributions Soient T et S deux distributions.

1. On appelle *produit de convolution* de T et S la distribution notée $S * T$, quand elle existe, définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ (S * T)(\varphi) = (S_u \otimes T_v)(\varphi(u + v)).$$

2. De plus : $S * T = T * S$.

Remarque Le problème majeur de cette définition est que, si T et S sont deux distributions quelconques, leur produit de convolution n'est pas toujours défini. Cela provient du fait que si $x \mapsto \varphi(x)$ est à support compact sur $\mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ n'est pas nécessairement à support compact sur $\mathbb{R}^2$. Pour que le produit de convolution de deux distributions soit défini, il suffit donc que les supports de S et de T vérifient certaines conditions. (On peut s'en convaincre par un dessin.) Le produit de convolution $S * T$ existe dans les deux cas suivants :

1. $\operatorname{supp} S$ ou $\operatorname{supp} T$ est compact.
2. $\exists\, a, b \in \mathbb{R},\ \operatorname{supp} S \subset [a, +\infty[$ et $\operatorname{supp} T \subset [b, +\infty[$.

Exemple On considère la fonction d'Heaviside. On sait que supp $T_H \subset [0, +\infty[$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(T_H * T_H)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} H(x) \left(\int_{\mathbb{R}} H(y)\varphi(x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \varphi(x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

On pose $u = x + y$.

$$T_H * T_H)(\varphi) = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \varphi(u) \left(\int_0^{\infty} 1\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$(T_H * T_h)(\varphi) = \int_0^{+\infty} u\varphi(u)\,\mathrm{d}u = T_\psi(\varphi), \quad \psi(t) = tH(t)$$

On écrit : $\boxed{H * H = tH}$ au sens des distributions.

Proposition 3.24 Soient T, S deux distributions.

1. $\forall p \in \mathbb{N},\ \delta^{(p)} * T = T^{(p)}$.
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.
3. Si S et T sont convolables, alors $(S * T)' = S' * T + S * T'$.

Démonstration
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a ;

$$\begin{aligned}(\delta^{(p)} * T)(\varphi) &= (T * \delta^{(p)})(\varphi) \\ &= T_x(\delta^{(p)}(y \longmapsto \varphi(x+y)) \\ &= T_x((-1)^p \varphi^{(p)}(x)) \\ &= (-1)^p T(\varphi^{(p)}) \\ &= T^{(p)}(\varphi)\end{aligned}$$

Étant donné P un polynôme ; $P(Xp) = a_0 + \ldots + a_n X^n$.
On introduit l'opérateur différentiel associé : $P(D) = a_0\mathrm{id} + \ldots + a_n D^n$ où $D\varphi = \varphi'$ et $D^k = D \circ \ldots \circ D$ (k fois).
$P(D)\varphi = a_0\varphi + a_1\varphi' + \ldots + a_n\varphi^{(n)}$.
On a : $P(D)(T) = P(D)(\delta * T) = P(D)\delta * T \quad (T' = \delta' * T)$.

Définition 3.25 Soit $P(D)$ un opérateur différentiel polynômial linéaire sur $\mathbb{R}$.
On appelle *solution élémentaire* (ou *fondamentale*) de $P(D)$ toute distribution E vérifiant $P(D)(E) = \delta$.

Si on cherche à résoudre une équation du type (1) : $P(D)X = T$, où $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est la donnée et $X \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'inconnue :

1. On cherche une solution élémentaire E de l'opérateur $P(D)$.
2. $X = E * T$ est une solution de (1) si le produit de convolution est bien défini :

$$\begin{aligned}P(D)(X) &= P(D)(E * T) \\ &= (P(D)E) * T \\ &= \delta * T = T\end{aligned}$$

CHAPITRE 4
SÉRIES ET TRANSFORMÉES DE FOURIER

1 SÉRIES DE FOURIER

La physique offre de nombreux exemples de fonctions périodiques. Les phénomènes vibratoires en fournissent à eux seuls une pléiade. Une telle fonction f est caractérisée par l'existence d'un réel $T > 0$ appelé période tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

On peut aussi noter $\omega = 2\pi/T$ la pulsation de f. La variable de la fonction représente souvent le temps. C'est le cas par exemple en optique, en mécanique, ou en traitement du signal. La théorie de Fourier permet d'interpréter ces fonctions périodiques (ou signaux) comme la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. Cette idée maîtresse de Fourier est apparue pour a première fois dans son mémoire accepté à l'Académie des Sciences en 1808 où en particulier il traitait de l'équation qui régit la propagation de la chaleur dans les solides. Fourier publiera une version remaniée et augmentée de son mémoire, sous le titre *Traité analytique de la chaleur*, en 1822. Celui-ci deviendra une des œuvres scientifiques majeures du XIXe siècle.

1.1 Théorie L^2 des séries de Fourier

Soit f une fonction de période T. On se ramène à une fonction 2π-périodique en posant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = f\left(\frac{t}{\omega}\right).$$

Dans la suite, on considère que les fonctions sont périodiques de période 2π. On commence par définir le produit scalaire complexe.

> **Définition 4.1 : Produit scalaire complexe** Soit E un $\mathbb{C}$-ev. Soit λ un nombre complexe.
> On appele *produit scalaire complexe* toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est :
> 1. *sesquilinéaire* :
>   (a) $\forall x \in E,\ y \longmapsto \langle x|y\rangle$ est semi-linéaire, c'est-à-dire $\langle x|\lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x|y\rangle$ et $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$;
>   (b) $\forall y \in E,\ x \longmapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire sur $\mathbb{C}$;
> 2. *hermitienne* : $\forall\, x, y \in E,\ \langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$ (et donc $\langle x|x\rangle \in \mathbb{R}$) ;
> 3. *définie positive* : $\forall x \in E,\ \langle x|x\rangle \geqslant 0$ et $\langle x|x\rangle = 0 \implies x = 0$.

Notations

1. On note $L^2([-\pi,\pi])$ l'espace des fonctions $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue.
2. Pour f et g dans $L^2([-\pi,\pi])$, on pose :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

L'application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire complexe sur $L^2([-\pi,\pi])$.

3. Pour $f \in L^2([-\pi,\pi])$, on pose
$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle}.$$
L'application $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $L^2([-\pi,\pi])$.
4. $(L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach.
5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction définie sur $[-\pi, pi]$:
$$e_n : t \longmapsto \mathrm{e}^{int}.$$

Proposition 4.2 La famille de fonctions $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2([-\pi,\pi])$.

Démonstration
On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \in L^2([-\pi,\pi])$.
De plus, on a :
$$\forall n \neq m \in \mathbb{Z},\ \langle e_n|e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n-m)t}}{i(n-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$
et
$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \|e_n\|_2^2 = \langle e_n|e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t = 1.$$
□

Définition 4.3 : Série de Fourier complexe
1. Pour tout $f \in L^2([-\pi,\pi])$, on appelle *coefficient de Fourier d'ordre n de f* le scalaire :
$$\langle f|e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$
2. On appelle alors *série de Fourier complexe de f* la série de fonctions définie formellement par :
$$Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f|e_n\rangle e_n.$$

Dans ce paragraphe, on étudie la convergence de Sf dans l'espace $L^2([-\pi,\pi])$. Pour cela, on établit d'abord une première propriété sur le comportement des coefficients de Fourier d'une fonction f de l'espace.

Théorème 4.4 : Inégalité de Bessel Si $f \in L^2([-\pi,\pi])$, alors :
1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f|e_n\rangle|^2$ est convergente.
2. On a : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle f|e_n\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2$.

Démonstration
On pose :
$$V_n = \mathrm{Vect}\{e_k \mid -N \leqslant k \leqslant N\} \quad \text{et} \quad S_N f = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k \in V_N.$$
On a $S_N f \in V_N^{\perp}$ (c'est-à-dire $\langle f - S_N f|g\rangle_2 = 0$).
On a : $f = f - S_N f + S_N f$, donc : $\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2$.
Donc :
$$\|f\|_2^2 \geqslant \|S_N f\|_2^2 \leqslant \sum_{k=-N}^{N} |c_k(f)|^2.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$$

□

Dans la suite, on montre qu'effectivement la série de Fourier Sf d'une fonction f de $L^2([-\pi,\pi])$ converge dans $L^2([-\pi,\pi])$. Dans un premier temps, on établit la propriété remarquable suivante, qui donne l'injectivité des coefficients de Fourier.

Proposition 4.5 Soit $f \in L^2([-\pi,\pi])$.

— On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \langle f | e_n \rangle = 0.$$

— Alors :

$$f = 0 \quad \text{pp.}$$

Démonstration

Cas où f est continue

Supposons par l'absurde que f n'est pas nulle. Il existe ainsi $c \in [-\pi,\pi]$ tel que $f(c) \neq 0$. Quitte à poser $g = -f$ et à faire une translation, on peut supposer que $f(c) > 0$ et que $c = 0$. Comme f est continue, il existe $h > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant h,\ f(x) \geqslant \frac{f(0)}{2} > 0.$$

On fixe h. On pose alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = (1 + \cos x + \cos h)^k$.
Par linéarité du produit scalaire, puisque par hypothèses, $\langle f | e_n \rangle = 0$ pour tout entier relatif n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_{\pi}^{\pi} f(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Or, on remarque que

$$\lim_{k\to+\infty} P_k(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in]-h,h[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi,\pi] \setminus [-h,h] \\ 1 & \text{si } x = \pm h \end{cases}$$

Comme f est bornée et que pour $x \in [-\pi,\pi] \setminus]h,h[$, $|P_k(x)| \leqslant 1$ le théorème de convergence dominée assure que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\int_{-\pi}^{-h} f(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_{h}^{\pi} f(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x \right) = 0. \tag{2}$$

Sur $]-h,h[$, on applique le lemme de Fatou :

$$\int_{-h}^{h} \liminf_{k\to+\infty} [f(x) P_k(x)]\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{k\to+\infty} \left[\int_{-h}^{h} f(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x \right].$$

Or le membre de gauche tend vers l'infini, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\int_{-h}^{h} f(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x \right] = +\infty.$$

Ceci contredit l'égalité (1), compte tenu de (2).
Donc si f est continue, alors f est nécessairement identiquement nulle.

Cas où $f \in L^2([-\pi,\pi])$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $L^2([-\pi,\pi]) \subset L^1([-\pi,\pi])$. Donc f est intégrable sur $[-\pi,\pi]$. On pose alors :

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ \Phi(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Φ est clairement continue sur $[-\pi,\pi]$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t}^{\pi}\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\mathrm{e}^{-inx}}{-in}\right]_t^{\pi}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{-in}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-1)^n f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\right) \\
&= \frac{1}{-in}[(-1)^n\langle f|e_0\rangle - \langle f|e_n\rangle] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \langle \Phi|e_n\rangle = 0$. On pose alors $C = \langle \Phi|e_0\rangle e_0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\langle \Phi - C|e_n\rangle = \langle \Phi|e_n\rangle - \langle \Phi|e_0\rangle\langle e_0|e_n\rangle = 0.$$

D'après le premier cas, comme Φ est continue, on a $\Phi - C = 0$ c'est-à-dire $\Phi = C$:

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Cela implique : $f = 0$ presque partout sur $[-\pi,\pi]$. □

Théorème 4.6 Soit $f \in L^2([-\pi,\pi])$.

1. La série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f :

$$\lim_{N\to+\infty}\left\| f - \sum_{n=-N}^{N}\langle f|e_n\rangle e_n\right\|_2 = 0.$$

2. En particulier, on a l'*égalité de Parseval* :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\langle f|e_n\rangle|^2 = \|f\|_2^2.$$

Démonstration

1. On pose : $\forall N \in \mathbb{N},\ S_N f = \sum_{k=-N}^{N}\langle f|e_k\rangle e_k$.

On a donc pour tout couple $(p,N) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|S_{N+p}f - S_N f\|_2^2 = \sum_{N+1\leqslant|k|\leqslant N+p}|\langle f|e_k\rangle|^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

(comme reste d'une série convergente d'après l'inégalité de Bessel.) La suite $(S_N f)$ est donc une suite de Cauchy dans $L^2([-\pi,\pi])$, qui est un espace complet. Elle converge donc dans $L^2([-\pi,\pi])$ vers un élément Sf de $L^2([-\pi,\pi])$, c'est à dire que lorsque $N \longrightarrow +\infty$, $\|Sf - S_N f\|_2 \longrightarrow 0$. Par continuité du produit scalaire, on tire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\langle f - Sf | e_k \rangle &= \langle \lim_{N\to+\infty} f - S_N f | e_k \rangle \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\langle f|e_k\rangle - \left\langle \sum_{j=-N}^{N} \langle f|e_j\rangle e_j \middle| e_k \right\rangle \right) \\
&= \langle f|e_k\rangle - \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=-N}^{N} \langle f|e_j\rangle \langle e_j|e_k\rangle \\
&= \langle f|e_k\rangle - \langle f|e_k\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La proposition 4.4 assure alors que $S - Sf = 0$, soit $f = Sf$ dans $L^2([-\pi,\pi])$. On a donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0.$$

2. On sait que :

$$\left\| \sum_{k=-N}^{N} \langle f|e_k\rangle e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{N} |\langle f|e_k\rangle| \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2.$$

Or, en utilisant les notations et la preuve de la proposition précédente, on a $P_{V_N}(f) = S_N f$ et

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f\|_2^2. \tag{3}$$

Par continuité de la norme, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} |\langle f|e_k\rangle|^2 \right) = \lim_{N\to+\infty} \|S_N f\|_2^2 = \|Sf\|_2^2.$$

Par convergence de la série et unicité de la limite on obtient :

$$\|Sf\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2.$$

En utilisant 1. et (3), on conclut que :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2.$$

□

Remarque $S_N f \xrightarrow[N\to+\infty]{} f$ dans $L^2([-\pi,\pi])$ n'implique pas $(S_N f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} f(x), x \in [-\pi,\pi]$.

1.2 Séries de Fourier des fonctions continues par morceaux

Convention Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. Aux points de discontinuité x, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t) + \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t) \right).$$

Définition 4.7 : Coefficients de Fourier réels Soit f une fonction de 2π-périodique de continue par morceaux.

1. On rappelle les coefficients de Fourier complexes définis précédemment, on les notes $c_n(f)$:
$$c_n(f) = \langle f | e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t.$$
2. On appelle *coefficients de Fourier réels d'ordre n de f* les scalaires :
$$\begin{cases} a_0(f) = c_0(f) \\ b_0(f) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t \end{cases}$$
3. La série de Fourier de f peut alors s'écrire :
$$Sf = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{int} = a_0(f) + \sum_{n \geqslant 1} \Big(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt) \Big).$$

Propriétés 4.8

1. Si f est paire, alors pour tout entier n, $b_n = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t$.
2. Si f est impaire, alors pour tout entier n, $a_n = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t$.

Lemme 4.9 de Riemann-Lebesgue Soit f est une fonction de $L^1([-\pi, \pi])$. On a :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{int} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

<u>Démonstration</u>
On suppose dans un premier temps que f est de classe $\mathcal{C}^1[-\pi, \pi]$. Alors on a (IPP) :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t = \frac{-1}{in} [f(t)\, \mathrm{e}^{int}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t.$$
Cette quantité tend vers 0 quand $|n| \longrightarrow +\infty$. On utilise maintenant la densité de $\mathcal{C}^1[-\pi, \pi]$ dans $L^1([-\pi, \pi])$ (théorème d'approximation 2.30) : si $f \in L^1([-\pi, \pi])$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1[-\pi, \pi]$ tel que :
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| \, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$
On a alors :
$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)| \, \mathrm{d}t + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t)\, \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t \right|.$$
D'après ce qui précède, on peut trouver un entier N tel que la seconde intégrale soit plus petite que $\varepsilon/2$ pour $|n| \geqslant N$. □

On en déduit donc que, sous les conditions ci-dessus, les coefficients de Fourier complexes ou réels tendent vers 0 en l'infini. La vitesse de convergence est directement liée à la régularité de la fonction, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.10 Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction 2π-périodique.

1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^p$.
2. Alors ces coefficients de Fourier sont $o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Démonstration
On intègre par partie p fois :

$$2\pi c_n(f) = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{(-1)^p}{(in)^p} \,\mathrm{e}^{-int} f^{(p-1)}(t) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{(-1)^p}{(in)^p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \,\mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t.$$

On a donc :

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{n^p} |c_n(f^{(p)})|.$$

Comme $c_n(f^{(p)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on obtient le résultat. □

Théorème 4.11 de convergence simple de Dirichlet Soit f une fonction 2π-périodique.

— On suppose :
  (a) f est continue sur $[-\pi, \pi]$.
  (b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

— Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx) \Big) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Autrement dit, la série de Fourier de f converge simplement vers f, en adoptant aux points de discontinuité la convention présentée au début du paragraphe.

Démonstration
Exercice 61.

On a même un meilleur résultat si la fonction est plus régulière.

Théorème 4.12 Soit f une fonction 2π-périodique.

— On suppose :
  (a) f est continue sur $\mathbb{R}$.
  (b) f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.

— Alors : Sf converge normalement (donc uniformément) vers f.

Démonstration
Une IPP assure que :

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f').$$

Ainsi, on a :

$$|c_n(f)| = \frac{1}{n} |c_n(f')| \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')| \right).$$

La série de terme général $1/n^2$ converge. De même, l'inégalité de Parseval assure que la série de terme général $|c_n(f')|^2$ converge. Ainsi, la série de terme général $|c_n(f)|$ converge, donc la série de Fourier de f converge normalement. D'après le théorème de convergence simple de Dirichlet, elle converge nécessairement vers f. □

2 Transformée de Fourier

2.1 Idée

Si g est T-périodique (et de pulsation $\omega = 2\pi/T$) et de classe C^1 par morceaux, alors :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\,\mathrm{e}^{in\omega t}, \quad \text{où} \quad c_n(g) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,\mathrm{e}^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, on va supposer que pour $T \longrightarrow +\infty$, g est T-périodique. On va poser « $v = n/T$, $\mathrm{d}n = T\,\mathrm{d}v$ ». La somme discrète de la variable n devient une somme continue de la variable v. On peut donc écrire par abus de langage :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_v(g)\,\mathrm{e}^{i2\pi vt}\,T\,\mathrm{d}v, \quad \text{où} \quad Tc_n(g) = \int_{T/2}^{T/2} g(x)\,\mathrm{e}^{-i2\pi vt}.$$

Quand $T \longrightarrow +\infty$,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-i2\pi vx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{i2\pi vt}\,\mathrm{d}v.$$

La transformée de Fourier de la fonction (ou du signal) f sera alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi vx}\,\mathrm{d}x$ et la formule précédente sera la formule d'inversion qui permet de reconstruire le signal à partir de sa transformée de Fourier.

2.2 Définitions et propriétés

Définition 4.13 : Transformée de Fourier Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle *transformée de Fourier de g* la fonction, notée $\hat{g}$ (où parfois $\mathcal{F}g$) et définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-i2\pi xt}\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 4.14 Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors :

1. $\hat{g}$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ |\hat{g}(x)| \leqslant \|g\|_1$, c'est -à-dire $\|\hat{g}\|_\infty \leqslant \|g\|_1$.
3. L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \hat{g} \end{array}$ est linéaire, continue, et $\|\mathcal{F}\| \leqslant 1$.

<u>Démonstration</u>
Soit pour tout $v \in \mathbb{R}$, $u \longmapsto g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv}$ mesurable.
On a : $|g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv}| = |g(u)| \in L^1(\mathbb{R})$.
Donc $u \longmapsto g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv} \in L^1(\mathbb{R})$.
Donc $\hat{g}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Montrons que $\hat{g}$ est continue. Posons $v \longmapsto g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv}$ continue par morceaux pour presque tout u.
$|g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv}| = |g(u)| \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $v \in \mathbb{R}$.
Le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres implique que $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$|\hat{g}(v)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi uv}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u = \|g\|_1 < +\infty.$$

$\square$

Propriétés 4.15

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est paire, alors pour tout réel x, $\hat{f}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\cos(2\pi ux)\,\mathrm{d}u$.
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est impaire, alors pour tout réel x, $\hat{f}(x) = -2i\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\sin(2\pi ux)\,\mathrm{d}u$.
3. De plus, si f est supposée à valeurs réelles, alors $\hat{f}$ est à valeurs réelles.

Démonstration
1. $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi ux}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0}$. Par un changement de variable dans la deuxième intégrale $v = -u$, on a le résultat avec la formule d'Euler.
2. idem □

Propriété 4.16 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g(t) = f(t-\tau)$ où $\tau \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel x :

$$\hat{g}(x) = \mathrm{e}^{-2i\pi x\tau}\,\hat{f}(x).$$

Démonstration
Par un changement de variable, on obtient le résultat. □

Proposition 4.17 Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\gamma > 0$. Soit $g : t \longmapsto f(\gamma t)$. On a :

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\gamma}\hat{f}\left(\frac{x}{\gamma}\right).$$

Démonstration
Exercice. □

Théorème 4.18 Si f_1 et f_2 sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \times \hat{f}_2$.

Démonstration
La transformée de Fourier de $g = f_1 * f_2$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi xt}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-y)f_2(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t.$$

On pose pour presque tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(t,y) = \mathrm{e}^{-2i\pi xt}\,f_1(t-y)f_2(y)$. On a, puisque f_1 et f_2 sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |h(t,y)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(t-y)|\,\mathrm{d}t\right)|f_2(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Ainsi, on en déduit :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |h(t,y)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \|f_1\|_1 |f_2(y)|\,\mathrm{d}y = \|f_1\|_1 \times \|f_2\|_1.$$

Par conséquent, h est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ et le théorème de Fubini peut s'appliquer dans le contexte suivant :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{g}(x) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-2i\pi xt}\, f_1(t-y) f_2(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-2i\pi x(t-y)}\, f_1(t-y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xy}\, f_2(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2i\pi x(t-y)}\, f_1(t-y)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-2i\pi xy}\, f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xy}\, f_2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \hat{f}_1(x)\hat{f}_2(x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\hat{g} = \hat{f}_1 \times \hat{f}_2$. □

Théorème 4.19 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f'}(x) = 2i\pi x \hat{f}(x).$$
2. Si $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ et si pour tout $k \in [\![1,p]\!],\ f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \hat{f}(x).$$
3. Si $t \longmapsto u_k(t) = t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ où $1 \leqslant k \leqslant p$, alors $\hat{f}$ est p fois dérivable et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}^{(k)}(x) = (-2i\pi)^k \hat{u}_k(x).$$

Démonstration

1. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f'}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi tx}\,\mathrm{d}t$.

Par une intégration par partie, on a : $\widehat{f'}(x) = \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + 2i\pi x \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t}_{\hat{f}(x)}$.

On a : $|f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi tx}| = |f(t)|$.
On sait que $f' \in L^1(\mathbb{R})$, donc f admet une limite ℓ_1 en $+\infty$ et une limite ℓ_2 en $-\infty$. Or si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et admet une limite ℓ_1 en $+\infty$, alors $\ell_1 = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f'}(x) = 2i\pi x \hat{f}(x)$.
2. Par récurrence.
3. $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t$. On a :
Pour tout $x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt} \in L^1(\mathbb{R})$,
Pour tout $t \in \mathbb{R},\ x \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}$ est dérivable.
On a : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\right) = -2i\pi t f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}$.
Donc $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\right)\right| = 2\pi|tf(t)| \in L^1(\mathbb{R})$.
Le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et donne que $\hat{f}$ est dérivable et que :

$$\hat{f}'(x) = -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{e}^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t = -2i\pi \hat{u}_1(x).$$

On termine par récurrence. □

Le lemme suivant rappelle celui sur le comportement de la suite des coefficients de Fourier.

Lemme 4.20 de Riemann-Lebesgue Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a :

$$\lim_{|x|\to+\infty} |\hat{f}(x)| = 0.$$

Démonstration

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors f' est dans $L^1(\mathbb{R})$, et d'après le théorème précédent, $\widehat{f'}(x) = 2i\pi x\hat{f}(x)$. On a donc :

$$|\hat{f}(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi|x|}\|\mathcal{F}(f')\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi|x|}\|f'\|_1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

La propriété est donc vraie pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On utilise alors la densité des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans L^p (théorème d'approximation 2.30) pour trouver une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (f_n) telle que $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a aussi, pour tout entier n, :

$$\lim_{|x|\to+\infty} |\hat{f}_n(x)| = 0.$$

Et on écrit :

$$|\hat{f}(x)| \leqslant |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)| + |\hat{f}_n(x)| \leqslant \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_\infty + |\hat{f}_n(x)| \leqslant \|f - f_n\|_1 + |\hat{f}_n(x)|.$$

On en déduit que : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |\hat{f}(x)| = 0.$ □

Théorème 4.21 d'inversion

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout réel x,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\,\mathrm{e}^{2i\pi xt}\,\mathrm{d}t.$$

2. On définit alors la *co-transformée de Fourier* de $g \in L^1(\mathbb{R})$, notée $\overline{\mathcal{F}}g$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \overline{\mathcal{F}}g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{2i\pi tx}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Exercice 32. □

Remarques

1. Le théorème d'inversion dit que si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \quad$ pp.
2. On a aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{F}}g(x) = \mathcal{F}g(-x)$, donc $\overline{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ est linéaire, continue et pour tout g, $\overline{F}(g)$ est continue et $\overline{\mathcal{F}}g(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$.

Corollaire 4.22 La transformation de Fourier est injective, c'est-à-dire :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \hat{f} = 0 \implies f = 0 \quad \text{pp.}$$

Démonstration

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} = 0$, alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et donc la transformation de Fourier donne $f = 0$ pour presque tout x. □

3 Espace de Schwartz

Définition 4.23 : Fonction à décroissance rapide Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est à *décroissance rapide* si :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{|x| \to +\infty} |x^p f(x)| = 0.$$

Remarque f est à décroissance rapide $\implies \forall P$ polynôme, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |p(x) f(x)| = 0$. Autrement dit, si f est à décroissance rapide, alors f tend vers 0 à l'infini « plus vite » que les inverses de polynômes.

Exemples :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ est à décroissance rapide.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ n'est pas à décroissance rapide. En effet, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si f est à support compact, alors f est à décroissance rapide !

Proposition 4.24 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a :

$$f \text{ est à décroissance rapide} \implies \hat{f} \in \mathcal{C}^\infty.$$

Démonstration
Il suffit de montrer que $\forall k \geqslant 1,\ t \longmapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.
On a : $|t^k f(t)| = (1 + t^2)|t^k f(t)| \dfrac{1}{1 + t^2}$.
f est à décroissance rapide : $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |t^k f(t)| + |t^{k+2} f(t)| = 0$. Donc il existe t_0 tel que :

$$\forall |t| \geqslant t_0,\ |t^k f(t)| + |t^{k+2} f(t)| \leqslant 1$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^k f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{|t| < t_0} |t^k f(t)|\,\mathrm{d}t}_{\leqslant t_0^k \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t} + \underbrace{\int_{|t| > t_0} \mathrm{d}t}_{\text{converge}}$$

□

Définition 4.25 : Espace de Schwartz
On appelle *Espace de Schwartz*, noté $S(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions f vérifiant :

1. $f \in \mathcal{C}^\infty$
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}$ est à décroissance rapide.

Propriétés 4.26 de l'espace de Schwartz

1. $\forall f \in S(\mathbb{R}),\ P \in \mathbb{C}[X] \implies Pf \in S(R)$.
2. $f \in S(\mathbb{R}) \implies \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} \in S(\mathbb{R})$.
3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.
4. $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (découle de la propriété précédente et du fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$).

Théorème 4.27 $f \in S(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Démonstration
On sait que $f \in S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et que f est à décroissance rapide. Alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty$.
Soient $p, k \in \mathbb{N}$.
On a (prop 4.2.4) : $x^p \hat{f}(x) = x^p(-2i\pi)^k \hat{u}_k(x)$, où $u_k(t) = t^k \hat{f}(t)$.
Et (même prop) $x^p \hat{f}^{(k)} = (-2i\pi)^k \dfrac{1}{(2i\pi)^k} \widehat{u_k^{(p)}}(x)$.
Donc :

$$|x^p \hat{f}^{(k)}(x)| = (2\pi)^{k-p} |\widehat{u_k^{(p)}}(x)|$$

Donc $u_k^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$.
En fait, $f \in S(\mathbb{R}) \implies t \longmapsto u_k(t) = t^p f(t) \in S(\mathbb{R}) \implies u_k^{(p)} \in S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.
Le lemme de Riemann-Lebesgue implique que

$$\lim_{|x| \to +\infty} |u_k^{(p)}(x)| = 0$$

Donc

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x^p \hat{f}^{(k)}(x)| = 0$$

Donc pour tout entier k, $\hat{f}$ est à décroissance rapide. Donc $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. □

Théorème 4.28 d'inversion pour $S(\mathbb{R})$ Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, \mathrm{e}^{2i\pi xt}\, \mathrm{d}t = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} f(x)$$

Démonstration
$f \in S(\mathbb{R})$ donc f et $\hat{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après la formule d'inversion de Fourier, pour presque tout réel x :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, \mathrm{e}^{2i\pi xt}\, \mathrm{d}t$$

Or f est continue. On pose $g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \mathrm{e}^{2\pi ixt}\, \mathrm{d}t$, qui est continue d'après le théorème de continuité sous le signe intégral. On a : $f = g$ pp. De plus, f et g sont continues, ce qui implique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$$

□

4 Distribution tempérée et transformée de Fourier

Remarque Si $f, \varphi \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ et $\hat{\varphi}$ sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Avec Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t.$$

C'est à dire : $\hat{T}_f(\varphi) = T_f(\hat{\varphi})$. De façon générale, on a envie de définir pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}).$$

Problème : $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \not\Longrightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En revanche, on sait que $\varphi \in S(\mathbb{R}) \implies \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R})$. On agrandit alors la classe des fonctions-test utilisées pour définir les distributions tempérées (ce qui réduit alors automatiquement la classe des distributions concernées). Au préalable, comme pour l'ev $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on doit définir une topologie pour $S(\mathbb{R})$.

Définition 4.29 Soit $(\varphi_j)_j$ une suite de $S(\mathbb{R})$.
On dit que (φ_j) converge vers 0 dans $S(\mathbb{R})$ si :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{j \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \varphi_j^{(k)}(x)| = 0$$

Remarque Si $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{} \text{ dans } S(\mathbb{R}).$$

En effet, $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ implique qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset K$ et pour tout entier k, $\sup_{x \in K} |\varphi_j^{(k)}(x)| \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$. K est compact implique aussi qu'il existe $A > 0$ tel que $K \in [-A, A]$. Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \varphi_j^{(k)}(x)| &= \sup_{x \in K} |x^p \varphi_j^{(k)}(x)| \\ &\leqslant A^p \sup_{x \in K} |\varphi_j^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

Donc $\varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque Si (φ_j) est une suite de $S(\mathbb{R})$, on dit que $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} \varphi$ dans $S(\mathbb{R})$ si $\varphi_j - \varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $S(\mathbb{R})$.

Proposition 4.30 Soit $(\varphi_j) \in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$.
- Si $\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$
- Alors :
  (a) $\varphi_j' \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $S(\mathbb{R})$.
  (b) $\forall p \in \mathbb{C}[X],\ p\varphi_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $S(\mathbb{R})$.
  (c) $\varphi \xrightarrow[j \to +\infty]{}$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
  (d) $\hat{\varphi} \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$ dans $S(\mathbb{R})$.

Démonstration
1. 2. découlent des définitions et de la formule de Leibniz.
3. $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$. On a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} (1+t^2)|\varphi_j| \frac{1}{1+t^2}$
Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\varphi_j(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant C \sup_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2)|\varphi_j(t)|$, où $\displaystyle C = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.
On a : $\sup_{t \in \mathbb{R}}(1+t^2)|\varphi_j(t)| \longrightarrow 0$, donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\varphi_j(t)|\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$, et donc $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$.
4. On a vu que $|x^p \hat{\varphi}_j^{(k)}(x)| = (2\pi)^{k-p} |\widehat{(t^k \varphi_j)^{(p)}}(x)|$, donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \hat{\varphi}_j^{(k)}(x)| = (2\pi)^{k-p} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{(t^k \varphi_j)^{(p)}}(x)|$.
On rappelle que $\|\mathcal{F}\| \leqslant 1$, donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \hat{\varphi}_j^{(k)}(x)| \leqslant (2\pi)^{k-p} \|(t^k \varphi_j^{(p)}\|_1$. On a ainsi : $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$, donc $t^k \varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$ (2.), donc $(t^k \varphi_j)^{(p)} \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$ (1.), donc $\|(t^k \varphi_j)^{(p)}\| \longrightarrow 0$ (3.), donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p \hat{\varphi}^{(k)}(x)| \longrightarrow 0$, c'est à dire :

$$\hat{\varphi}_j \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0 \text{ dans } S(\mathbb{R}).$$

□

Définition 4.31 : Distribution tempérée

1. Une application $T : S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée *distribution tempérée* si
   (a) T est linéaire.
   (b) $\forall (\varphi_j) \in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}},\ \varphi_j \longrightarrow 0,\ T\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. On note l'ensemble des distribution tempérées $S'(\mathbb{R})$.

Remarque Une distribution tempérée est une distribution !
En effet : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$. Si $(\varphi_j) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}},\ \varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$. Et donc si T est une distribution tempérée, alors $T\varphi \longrightarrow 0$. Donc T est une distribution.

Remarque On a : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ mais $S'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Si $T \in S'(\mathbb{R})$, et $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit pour $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$(PT)(\varphi) = T(P\varphi)$$

et on montre que $PT \in S'(\mathbb{R})$. On définit aussi pour $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

et on montre que $T' \in S'(\mathbb{R})$.

Définition 4.32 : Transformée d'une distribution tempérée
Pour $T \in S'(\mathbb{R})$, on pose pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$:

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$$

Proposition 4.33 $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$.

Démonstration
Si $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$, alors $\hat{\varphi}_j \longrightarrow 0$ et donc $T(\hat{\varphi}_j) \longrightarrow 0$.
De plus, $\forall\, \varphi, \psi \in S(\mathbb{R})\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\hat{T}(\lambda\varphi + \psi) &= T(\widehat{\lambda\varphi + \psi}) \\ &= T(\lambda\hat{\varphi} + \hat{\psi}) \\ &= \lambda T(\hat{\varphi}) + T(\psi) \\ &= \lambda\hat{T}(\varphi) + \hat{T}(\psi)\end{aligned}$$

Donc $\hat{T} \in S'(\mathbb{R})$. □

Remarque On peut aussi définir la co-transformée de Fourier d'une distribution tempérée :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ (\overline{\mathcal{F}}T)(\varphi) = T(\overline{\mathcal{F}}\varphi)$$

et on a : $\overline{\mathcal{F}}T \in S'(\mathbb{R})$.
On a aussi : $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T = T$ et $(\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}T)(\varphi) = T(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi)$. Le théorème d'inversion assure de plus que $\varphi = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi$. Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$.

Exemple $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. On a $\delta_0 \in S'(\mathbb{R})$ et $\hat{\delta}_0 = 1$.
Démonstration
δ_0 est linéaire. Soit (φ_j) telle que $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $S(\mathbb{R})$.
Pour tous $p, k \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |t^p \varphi_j^{(k)}(x)| \longrightarrow 0$.
$|\delta_0(\varphi_j)| = |\varphi_j(0)| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_j(t)| \longrightarrow 0$. Donc $\delta(\varphi_j) \longrightarrow 0$, donc $\delta_0 \in S'(\mathbb{R})$.
On a de plus : $\hat{\delta}_0(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi t 0}\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = T_{\mathbb{1}}(\varphi) = 1$ au sens des distributions. □

Définition 4.34 : Distribution translatée Soient $T \in S'(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.
1. On appelle *distribution translatée de T de paramètre a* la distribution, notée $\tau_a T$ ou $T(t-a)$, définie par :
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ (ou } S(\mathbb{R})),\ \tau_a T(\varphi) = T(\varphi(x+a)).$$
2. Une distribution T est alors dite périodique de période a si : $\tau_a T = T$.

Remarque On a : $\tau_a \delta = \delta_a$.

Propriétés 4.35
1. L'application $T \longmapsto \hat{T}$ est une application linéaire et continue de $S'(\mathbb{R})$ dans $S'(\mathbb{R})$.
2. Si $T \in S'(\mathbb{R}) \implies \forall k \in \mathbb{N},\ (\mathcal{F}T)^{(k)} = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^k T]$.
3. $T \in S'(\mathbb{R}) \implies \forall k \in \mathbb{N},\ \widehat{T^{(k)}} = (2i\pi t)^k \hat{T}$.
4. $T \in S'(\mathbb{R}) \implies \forall a \in \mathbb{R},\ \widehat{\tau_a T} = \mathrm{e}^{-2i\pi x a}\, \hat{T}$.
5. $T \in S'(\mathbb{R}) \implies \forall a \in \mathbb{R},\ \tau_a \hat{T} = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{2i\pi x a}\, T)$.

Démonstration
1. On dit que $(T_n) \in S'(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge vers $T \in S'(\mathbb{R})$ si
$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ T_n \varphi \longrightarrow T\varphi$$
Soit $T_n \longrightarrow 0$ dans $S'(\mathbb{R})$. On a alors :
$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}),\ \hat{T}_n(\varphi) = T_j(\hat{\varphi}) \longrightarrow 0$$
Ce qui implique $\hat{T}_j \longrightarrow 0$ dans $S'(\mathbb{R})$.
2. et 3. découlent des formules analogues pour les fonctions.
4. Soit $\varphi \in S(\mathbb{R})$.
On a : $\widehat{\tau_a T}(\varphi) = (\tau_a T)(\hat{\varphi}) = T(\tau_a \hat{\varphi})$. Donc $(\tau_a \hat{\varphi})(x) = \hat{\varphi}(x+a) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi a t}\, \mathrm{e}^{-2i\pi x t}\, \mathrm{d}t$.
On pose $\psi(t) = \mathrm{e}^{-2i\pi a t}\, \varphi(t)$. On a donc : $(\tau_a \hat{\varphi})(x) = \hat{\psi}(x)$.
Donc $\widehat{\tau_a T}(\varphi) = T(\hat{\psi}) = \hat{T}(\psi) = \hat{T}(\mathrm{e}^{-2i\pi a t}\, \varphi) = (\mathrm{e}^{-2i\pi a t}\, \hat{T})(\varphi)$.
Donc $\widehat{\tau_a T} = \mathrm{e}^{-2i\pi t a}\, \hat{T}$.
5. idem □